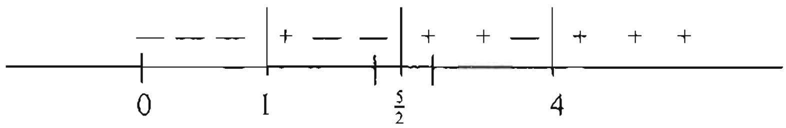
বা, $\dfrac{2x-5}{(x-4)\,(x-1)} > 0$ বা, $\dfrac{2(x-\frac{5}{2})}{(x-4)\,(x-1)} >$ .... (2)

এখন (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(x-1)$, $(x-\frac{5}{2})$ ও $(x-4)$ রাশিগুলোর দুইটি ঋণাত্মক ও একটি ধনাত্মক হয় অথবা তিনটিই ধনাত্মক হয়।

লক্ষ করি,



$x < 1$ হলে $x-1 < 0, x-\frac{5}{2} < 0, x-4 < 0$

$1 < x < \frac{5}{2}$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} < 0, x-4 < 0$

$\frac{5}{2} < x < 4$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} > 0, x-4 < 0$

$x > 4$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} > 0, x-4 > 0$

সুতরাং (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $1 < x < \frac{5}{2}$ অথবা $x > 4$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{x : 1 < x < \frac{5}{2}$ অথবা $x > 4\}$

মন্তব্য। সংখ্যারেখায় S এর চিত্ররূপ :

অনুশীলনী ৬.৪

সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

১। $(2x+5)\,(x-1) \leq 0$ ২। $(x+2)\,(4x-3) \geq 0$ ৩। $x(x-1)\,(x+2) > 0$

৪। $\dfrac{x(x+1)}{x-2} > 0$ ৫। $\dfrac{x(x-4)}{x-5} < 0$ ৬। $\dfrac{x-4}{x-2} > \dfrac{x-6}{x-3}$

৭। $\dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x-3}{x-4}$ ৮। $\dfrac{2x+3}{x-3} < \dfrac{x+3}{x-1}$ ৯। $\dfrac{(2x-3)(x-2)^2}{x+1} > 0$

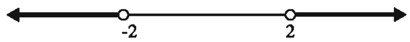
বহুনির্বাচনী প্রশ্নাবলী

১। $3.27^x = 9^{x+4}$ হলে, x = কত?

ক. 8 খ. -3

গ. 4 ঘ. 7

২। |x| > 2 অসমতার সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি ?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

৩। i. $\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x-12}$ সমীকরণটির বীজ, x = 13

ii. x <o হলে $\frac{|x|}{x} = 1$

iii. (x–4) (x–1) > 0 হবে যদি ও কেবল যদি x < 1 অথবা x > 4 হয়।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x>0 \\ x \text{ যখন } x<0 \\ x \text{ যখন } x=0 \end{cases}$$

৪। |-5| + 3 = কত?

ক. –2 খ. 8

গ. 2 ঘ. ±2

৫। |x - 4| = 2 হলে x এর মান কত ?

ক. 6 খ. 2

গ. 6, 2 ঘ. –6, 2

৬। x এর কোন মানের জন্য |x| + |x + 1| = 5 হয়?

ক. 2, –3 খ. –3, 2

গ, –2, 3 ঘ. 2, 3

সপ্তম অধ্যায়

দুই বা তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট এবং দুই চলকবিশিষ্ট অসমতা

৭.১। দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণ অথবা একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোটের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এরূপ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত কতিপয় জোটের সমাধান নির্ণয় আলোচনা করা হল।

উল্লেখ্য যে, চলক দুইটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x স্থলে a এবং y স্থলে b বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান : $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2},\ y + \frac{1}{x} = 3$

সমাধান ঃ $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ ....(i) $y + \frac{1}{x} = 3$......................... (ii)

(i) কে y দ্বারা গুণ করে পাই,

$xy + 1 = \frac{3}{2}y$ ....(iii)

(ii) কে y দ্বারা গুণ করে পাই,

$xy + 1 = 3x$........................(iv)

(iii) ও (iv) থেকে, $\frac{3}{2}y = 3x$ বা, $y = 2x$ ...... (v)

(v) থেকে y এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$2x^2 + 1 = 3x$ বা, $2x^2 - 3x + 1 = 0$

বা, $(x - 1)(2x - 1) = 0$ $\therefore$ $x = 1$ অথবা $\frac{1}{2}$

(v) থেকে, যখন $x = 1$, তখন $y = 2$ এবং যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 2), (\frac{1}{2}, 1)$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $x^2 = 3x + 6y,\ xy = 5x + 4y$.

সমাধান : $x^2 = 3x + 6y$.................................(i) $xy = 5x + 4y$..........................(ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে, $x(x - y) = -2(x - y)$ বা, $x(x - y) + 2(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x + 2) = 0$ $\therefore$ $x = y$............... (iii) বা, $x = -2$............................ (iv)

(iii) ও (i) থেকে আমরা পাই, $y^2 = 9y$ বা, $y(y - 9) = 0$ $\therefore$ $y = 0$ অথবা 9.

(iii) থেকে, যখন $y = 0$ তখন $x = 0$ এবং যখন $y = 9$, তখন $x = 9$

আবার (iv) ও (i) থেকে আমরা পাই, $x = -2$ এবং $4 = -6 + 6y$ বা, $6y = 10$ বা, $y = \frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (0, 0), (9, 9), (-2, \frac{5}{3})$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x^2 + y^2 = 61, xy = -30.$

সমাধান : $x^2 + y^2 = 61$,......................................(i) $xy = -30$..............................(ii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) এর সাথে যোগ করলে আমরা পাই,

$(x + y)^2 = 1$ বা, $x + y = \pm 1$...........................(iii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) থেকে বিয়োগ করলে আমরা পাই, $(x - y)^2 = 121$

বা, $x - y = \pm 11$...(iv)

(iii) ও (iv) থেকে,

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 11 \end{array}\right\}$......(v), $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = -11 \end{array}\right\}$.....(vi), $\left.\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = 11 \end{array}\right\}$.....(vii), $\left.\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = -11 \end{array}\right\}$....(viii)

এখন সমাধান করে,

(v) থেকে $x = 6, y = -5$; (vi) থেকে $x = -5, y = 6$

(vii) থেকে $x = 5, y = -6$ (viii) থেকে $x = -6, y = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, 5).$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8, 3xy - 2y^2 = 4.$

সমাধান : $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8$...............................(i) $3xy - 2y^2 = 4$....................(ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই,

$\frac{x^2 - 2xy + 8y^2}{3xy - 2y2} = \frac{2}{1}$ বা, $x^2 - 2xy + 8y^2 = 6xy - 4y^2$

বা, $x^2 - 8xy + 12y^2 = 0$ বা, $x^2 - 6xy - 2xy + 12y^2 = 0$

বা, $(x - 6y)(x - 2y) = 0 \therefore x = 6y$................ (iii) অথবা $x = 2y$....................... (iv)

(iii) থেকে x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.6y.y - 2y^2 = 4$ বা, $16y^2 = 4$ বা, $y^2 = \frac{1}{4}$ = বা, $y = \pm \frac{1}{4}$

(iii) থেকে, $x = 6 \times (\pm \frac{1}{2}) = \pm 3.$

আবার, (iv) থেকে x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.2y.y - 2y^2 = 4$ বা, $4y^2 = 4$ বা, $y^2 = 1$ বা, $y = \pm 1.$

(iv) থেকে $x = 2 \times (\pm 1) = \pm 2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (3, \frac{1}{2}), (-3, -\frac{1}{2}), (2, 1) (-2, -1).$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2}, x^2 + y^2 = 90$

সমাধান : $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2}$ ....(i) $x^2 + y^2 = 90$........................(ii)

(i) থেকে আমরা পাই,

$\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{(x + y)(x - y)} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{2(x^2 + y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{2 x 90}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$ [(ii) থেকে $x^2 + y^2 = 90$ বসিয়ে]

বা, $x^2 - y^2 = 72$ ....(iii)

(ii) + (iii) নিলে, $2x^2 = 162$ বা, $x^2 = 81$ বা, $x = \pm 9$

এবং (ii) – (iii) নিলে, $2y^2 = 18$ বা, $y^2 = 9$ বা, $y = \pm 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (9, 3), (9, -3), (-9, 3), (-9, -3)$.

অনুশীলনী ৭.১

সমাধান কর :

১। $(2x + 3)(y - 1) = 14, (x - 3)(y - 2) = -1$

২। $(x - 2)(y - 1) = 3, (x + 2)(2y - 5) = 15$.

৩। $x^2 = 7x + 6y, y^2 = 7y + 6x$.

৪। $x^2 = 3x + 2y, y^2 = 3y + 2x$.

৫। $x + \frac{4}{y} = 1, y + \frac{4}{x} = 25$.

৬। $y + 3 = \frac{4}{x}, x - 4 = \frac{5}{3y}$.

৭। $xy - x^2 = 1, y^2 - xy = 2$.

৮। $x^2 - xy = 14, y^2 + xy = 60$.

৯। $x^2 + y^2 = 25, xy = 12$.

১০। $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, x^2 - y^2 = 3$.

১১। $x^2 + xy + y^2 = 3, x^2 - xy + y^2 = 7$

১২। $2x^2 + 3xy + y^2 = 20, 5x^2 + 4y^2 = 41$.

৭.২। দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট

পূর্ব অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা সম্পর্কে এখানে আলোচনা করা হল।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $a^{x+2}.\ a^{2y+1} = a^{10}, a^{2x}.a^{y+1} = a^9, (a \neq 1)$

সমাধান : $a^{x+2}.\ a^{2y+1} = a^{10}$ ....(i) $a^{2x}.a^{y+1} = a^9$......................(ii)

(i) থেকে, $a^{x+2y+3} = a^{10}$ বা, $x + 2y + 3 = 10$ বা, $x + 2y - 7 = 0$..............(iii)

(ii) থেকে, $a^{2x+y+1} = a^9$ বা, $2x + y + 1 = 9$ বা, $2x + y - 8 = 0$...............(iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-16+7} = \frac{y}{-14+8} = \frac{1}{1-4}$$

বা, $\frac{x}{-9} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{-3}$ বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = 1$ বা, $x = 3, y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (3, 2)$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3^{3y-1} = 9^{x+y},\ 4^{x+3y} = 16^{2x+3}$

সমাধান : এখানে সমীকরণদ্বয় হলো

$3^{3y-1} = 9^{x+y}$ ....(i) এবং $4^{x+3y} = 16^{2x+3}$ ....(ii)

(i) থেকে $3^{3y-1} = (3^2)^{x+y} = 3^{2x+2y}$

$\therefore\ 3y - 1 = 2x + 2y$ বা, $2x - y + 1 = 0$..............(iii)

(ii) থেকে, $4^{x+3y} = (4^2)^{2x+3}$ বা, $4^{x+3y} = 4^{4x+6}$ বা, $x + 3y = 4x + 6$ বা, $3x - 3y + 6 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$...(iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-2+1} = \frac{y}{1-4} = \frac{1}{-2+1} \text{ বা, } \frac{x}{-1} = \frac{y}{-3} = -1 \text{ বা, } x = 1, y = 3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 3)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x^y = y^x$, $x = 2y$.

সমাধান : এখানে $x^y = y^x$ ....(i) $x = 2y$....................(ii) (যেখানে $x \neq 0, y \neq 0$.)

(i) এ (ii) থেকে x এর মান বসিয়ে পাই, $(2y)^y = y^{2y}$ বা, $2^y. y^y = y^{2y}$

বা, $\dfrac{y^{2y}}{y^y} = 2^y$ বা, $y^y = 2^y$ $\therefore$ $y = 2$. (ii) থেকে, $x = 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, 2)$.

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $x^y = y^2$, $y^{2y} = x^4$

সমাধান : $x^y = y^2$ .... (i); $y^{2y} = x^4$ .... (ii)

(i) থেকে পাই,

$(x^y)^y = (y^2)^y$ বা, $x^{y^2} = y^{2y}$ ....(iii);

(iii) ও (ii) থেকে পাই, $x^{y^2} = x^4$

$\therefore$ $y^2 = 4$ বা, $y = \pm 2$.

এখন $y = 2$ হলে (i) থেকে পাই, $x^2 = 2^2 = 4$ বা, $x = \pm 2$

আবার, $y = -2$ হলে, (i) থেকে পাই, $(x)^{-2} = (-2)^2 = 4$ বা, $\dfrac{1}{x^2} = 4$ বা, $x^2 = \dfrac{1}{x^2}$ বা, $x = \pm \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 2), (-2, 2), (\frac{1}{2}, -2), (-\frac{1}{2}, -2)$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $8.2^{xy} = 4^y$, $9^x.3^{xy} = \dfrac{1}{27}$

সমাধান : $8.2^{xy} = 4^y$ ....(i); $9^x.3^{xy} = \dfrac{1}{27}$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, $2^3.2^{xy} = (2^2)^y$ বা, $2^{3+xy} = 2^{2y}$ $\therefore$ $3 + xy = 2y$...................(iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^2)^x.3^{xy} = \dfrac{1}{3^3}$ বা, $3^{2x+xy} = 3^{-3}$ $\therefore$ $2x + xy = -3$.................(iv)

(iii) থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, $3 - 2x = 2y + 3$ বা, $-x = y$ ....(v)

(v) থেকে y এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই, $3 - x^2 = -2x$

বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$ বা, $(x + 1)(x - 3) = 0$

$\therefore$ $x = -1$ অথবা $x = 3$

$x = -1$ হলে (v) থেকে পাই, $y = 1$; $x = 3$ হলে (v) থেকে পাই, $y = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (-1, 1), (3, -3)$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $18y^x - y^{2x} = 81$, $3^x = y^2$

সমাধান : এখানে দেয়া আছে $18y^x - y^{2x} = 81$.....................(i) $3^x = y^2$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, $81 + y^{2x} - 18y^x = 0$ বা, $(y^x)^2 - 2.y^x.9 + 9^2 = 0$ বা, $(y^x - 9)^2 = 0$

বা, $y^x - 9 = 0$ বা, $y^x = 9$ বা, $y^x = 3^2$............(iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^x)^x = (y^2)^x$ বা, $3^{x^2} = (y^x)^2$ বা, $3^{x^2} = (3^2)^2$ [(iii)- এর মান ব্যবহার করে]

বা, $3^{x^2} = 3^4$ বা, $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ .... (iv)

$x = 2$ (ii) - এ বসিয়ে পাই, $y^2 = 3^2 = 9$ বা, $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = -2$ (ii) - এ বসিয়ে পাই, $y^2 = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ বা, $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \pm\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 3), (2, -3), (-2, \frac{1}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$.

অনুশীলনী - ৭.২

সমাধান কর :

১। $2^x + 3^y = 31$
$2^x - 3^y = -23$

২। $3^x = 9^y$
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$

৩। $3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$

৪। $2^x.3^y = 18$
$2^{2x}.3^y = 36$

৫। $a^x.a^{y+1} = a^7$
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$

৬। $\left.\begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array}\right\} y \neq 1$

৭। $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৮। $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৯। $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$.

৭.৩। তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান প্রতিস্থাপন, অপনয়ন, বজ্রগুণন ও নির্ণায়ক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। এরূপ সমীকরণ জোটের সমাধান করতে সাধারণত একটি চলক অপনয়ন করে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ নির্ণয় করা হয়। এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করে চলক দুইটির মান পাওয়া যায়। সবশেষে ঐ চলক দুইটির প্রাপ্ত মান যে কোনো একটি সমীকরণে প্রতিস্থাপন করলে তৃতীয় চলকটির মান পাওয়া যায়। উল্লেখ্য যে, চলক তিনটি x, y, z হলে এরূপ জোটের কোনো সমাধানকে $(x, y, z) = (a, b, c)$ লিখে প্রকাশ করা হয়, যেখানে সমীকরণগুলোতে x স্থলে a, y স্থলে b এবং z স্থলে c বসালে তাদের উভয়পক্ষ সমান হয়। (a, b, c) কে ক্রম-ত্রয়ী বলা হয় এবং $(x, y, z) = (a, b, c)$ যদি ও কেবল যদি $x = a, y = b$ এবং $z = c$।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $2x + 3y - z = 10$
$7x + 4y + 5z = 12$
$x - y - 3z = 25$

সমাধান : $2x + 3y - z = 10$ ....(i)
$7x + 4y + 5z = 12$ ....(ii)
$x - y - 3z = 25$ ....(iii)

(i) কে 5 দিয়ে গুণ করে পাই, $10x + 15y - 5z = 50$
(ii) থেকে পাই, $7x + 4y + 5z = 12$

যোগ করে, $17x + 19y = 62$ ....(iv)

(i) কে 3 দিয়ে গুণ করে পাই, $6x + 9y - 3z = 30$

(iii) থেকে পাই, $x - y - 3z = 25$

বিয়োগ করে, $5x + 10y = 5$

বা, $x + 2y = 1$ (v)

(iv) ও (v) থেকে, $17x + 19y - 62 = 0$

$x + 2y - 1 = 0$

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে, $\dfrac{x}{-19+124} = \dfrac{y}{-62+17} = \dfrac{1}{34-39}$

বা, $\dfrac{x}{105} = \dfrac{y}{-45} = \dfrac{1}{15}$ বা, $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{-3} = 1$ বা, $x = 7, y = -3$.

সমীকরণ (iii) এ x ও y এর মান বসিয়ে পাই, $7 + 3 - 3z = 25$ বা, $z = -5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = (7, -3, -5)$.

[বিশেষ দ্রষ্টব্য : বজ্রগুণন সূত্রের প্রমাণের জন্য মাধ্যমিক বীজগণিত দ্রষ্টব্য]

তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের দুইটি সমীকরণ যদি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে আমরা বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করতে পারি। মনে করি

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

তখন $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3x - 4y - 5z = 0$

$5x - 5y + z = 0$

$2x + 3y - 2z = 16$

সমাধান : $3x - 4y - 5z = 0$ ....(i)

$5x - 5y + z = 0$ ....(ii)

$2x + 3y - 2z = 16$ .... (iii)

(i) ও (ii) থেকে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{-4-25} = \frac{y}{-25-3} = \frac{z}{-15+20} \text{ বা, } \frac{x}{-20} = \frac{y}{-28} = \frac{z}{5} = k \text{ (ধরি)}$$

$\therefore x = -29k, y = -28k, z = 5k$ (iv)

x, y, z এর মানগুলো (iii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$58k - 84k - 10k = 16$ বা, $-152k = 16$ বা, $k = -\dfrac{2}{19}$

$\therefore$ (iv) থেকে, $x = \dfrac{58}{19}$, $y = \dfrac{56}{19}$, $z = \dfrac{-10}{19}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = \left(\dfrac{58}{19}, \dfrac{56}{19}, \dfrac{-10}{19}\right)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x + y + z = a + b + c$

$$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$$

[a, b, c পরস্পর অসমান অশূন্য ধ্রুবক।]

সমাধান : $x + y + z = a + b + c$ ....(i)

$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$ ....(ii)

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$ ....(iii)

(i) থেকে পাই, $(x - a) + (y - b) + (z - c) = 0$

(ii) থেকে পাই, $a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$

উপরোক্ত সমীকরণ দুইটিতে $(x - a)$, $(y - b)$ এবং $(z - c)$ কে চলক ধরে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x-a}{c-b} = \frac{y-b}{a-c} = \frac{z-c}{b-a} \quad \text{বা, } \frac{x-a}{b-c} = \frac{y-b}{c-a} = \frac{z-c}{a-b} = k \text{ (ধরি)}$$

$\therefore (x - a) = k(b - c)$, $(y - b) = k(c - a)$ এবং $(z - c) = k(a - b)$ ....(iv)

(iii) থেকে পাই, $\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \left(\frac{y}{b} - 1\right) + \left(\frac{z}{c} - 1\right) = 0$ বা, $\frac{x-a}{a} + \frac{y-b}{b} + \frac{z-c}{c} = 0$......(v)

(iv) থেকে $(x - a)$, $(x - b)$ ও $(x - c)$ এর মান (v) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{k(b-c)}{a} + \frac{k(c-a)}{b} + \frac{k(a-b)}{c} = 0$$

বা, $\frac{k}{abc}[bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)] = 0$

বা, $-\frac{k}{abc}[(a - b)(b - c)(c - a)] = 0$ [$\because$ অনুচ্ছেদ ২.৩ এর চক্রক্রমিক বহুপদীর উৎপাদক : উদা : ২ দ্রষ্টব্য]

$\therefore k = 0$ (কারণ a, b, c পরস্পর অসমান অশূন্য ধ্রুবক)।

সুতরাং (iv) এ $k = 0$ বসিয়ে আমরা পাই,

$x - a = 0$, $y - b = 0$ এবং $z - c = 0$

বা, $x = a$, $y = b$, $z = c$. $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = (a, b, c)$

অনুশীলনী ৭.৩

১। $x + y + 2z = 3$
$2x + y - z = 5$
$3x + 2y + 5z = 8$

২। $x + y + z = 6$
$x - y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 1$

৩। $2x - y - z = 1$
$x + 3y + z = 6$
$x + y + 2z = 1$

৪। $x + 2y + 5z = 3$
$2x - 3y - 7z = 5$
$4x - 2y + z = 0$

৫। $4x + 6y + z = 25$
$3x + 5y - 2z = 23$
$x + 2y + 3z = 5$

৬। $x + 2y + z = 0$
$x - 2y - 2z = 0$
$3x + y + z = 7$

৭। $8x + 4y - 7z = 0$
$2x - 8y + 5z = 0$
$3x + 2y - 2z = 4$

৮। $3x - 8y + 7z = 0$
$7x - 8y - 5z = 0$
$3x + 4y + 7z = 0$

৯। $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{5}$
$2x + 3y - 4z = 13$

৭.৪। দুই চলকবিশিষ্ট সরল একঘাত অসমতা

আমরা দুই চলকবিশিষ্ট $ax + by + c = 0$ আকারে সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে শিখেছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। আমরা দেখেছি যে, এ রকম প্রত্যেক লেখচিত্রই একটি সরল রেখা।

স্থানাঙ্কায়িত x, y সমতলে $ax + by + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রের যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ, সমীকরণটির বাম পক্ষে x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটি বসালে এর মান শূন্য হয়। অন্যদিকে, লেখচিত্রের বাইরে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না অর্থাৎ, ঐ বিন্দুর ভুজ কোটির জন্য $ax + by + c$ এর মান শূন্য অপেক্ষা বড় বা ছোট হয়। সমতলস্থ কোনো বিন্দু P এর ভুজ ও কোটি দ্বারা $ax + by + c$ রাশির x ও y কে যথাক্রমে প্রতিস্থাপন করলে রাশিটির যে মান হয়, তাকে P বিন্দুতে রাশিটির মান বলা হয় এবং উক্ত মানকে সাধারণত $f(P)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। P বিন্দু লেখস্থিত হলে $f(P) = 0$, P বিন্দু লেখচিত্রের বহিঃস্থ হলে $f(P) > 0$ অথবা $f(P) < 0$.

বাস্তবিক লেখচিত্রের পক্ষে বহিঃস্থ সকল বিন্দু লেখ দ্বারা দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত হয় : একটি অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য, $f(P) > 0$; অপর অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) < 0$.

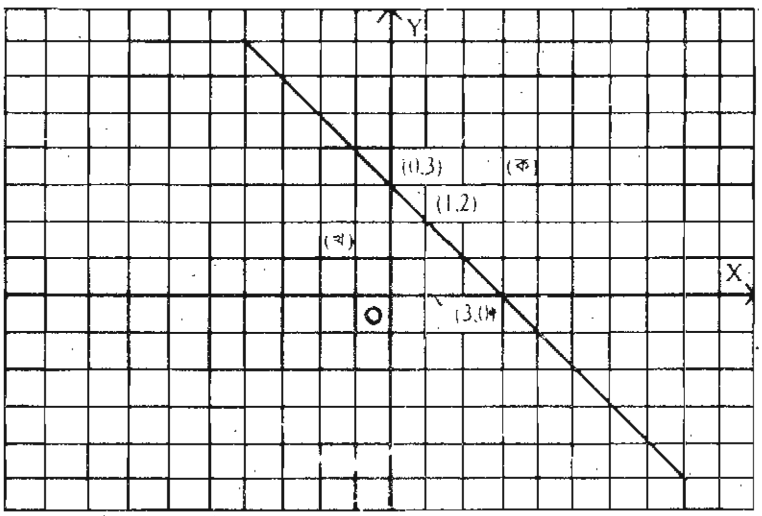
বলা বাহুল্য, লেখচিত্রের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) = 0$.

উদাহরণ ১। $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় :

$$y = 3 - x$$

x	0	3	1
y	3	0	2

এবং (x, y) সমতলে ছক-কাগজে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণটির লেখচিত্র নিম্নরূপ হয় :



এই লেখচিত্র রেখা সমগ্র তলটিকে তিনটি অংশে পৃথক করে। যথা :
(১) রেখার (ক) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ,
(২) রেখার (খ) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ, (৩) রেখাস্থিত বিন্দুসমূহ।
এখানে (ক) চিহ্নিত অংশকে লেখ-রেখার "উপরের অংশ" ও (খ) চিহ্নিত অংশকে লেখ-রেখার "নিচের অংশ" বলা যায়।

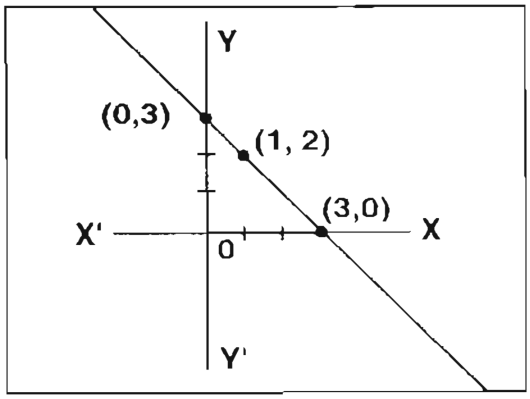
দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র

উদাহরণ ২। $x + y - 3 > 0$ অথবা $x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

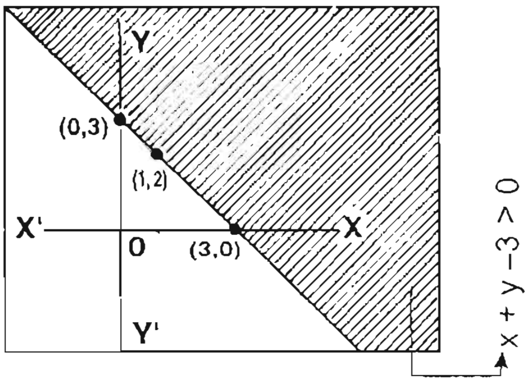
সমাধান। উপরিউক্ত অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে প্রথমেই ছক কাগজে $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$x + y - 3 = 0$ সমীকরণ থেকে পাই,

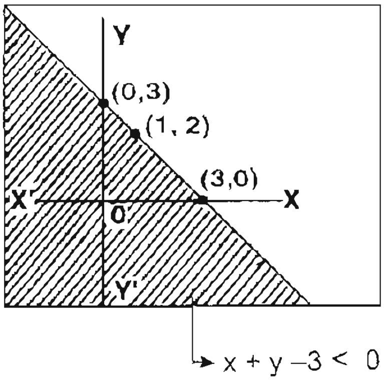
x	0	3	1
y	3	0	2



$x + y - 3 > 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে আমরা পাই $-3 > 0$ যা সত্য নয়। কাজেই, অসমতার ছায়াচিত্র হবে $x + y - 3 = 0$ সমীকরণের রেখার যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে।



$x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাওয়া যায় $-3 < 0$, যা অসমতাকে সিদ্ধ করে বা মান সত্য। কাজেই, এ অবস্থায় অসমতার ছায়াচিত্র হবে রেখাটির যে পার্শে মূলবিন্দু রয়েছে সে পার্শ্বে।



উদাহরণ ৩। $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান সেটের বর্ণনা দাও ও চিত্রিত কর।

সমাধান : আমরা প্রথমে $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

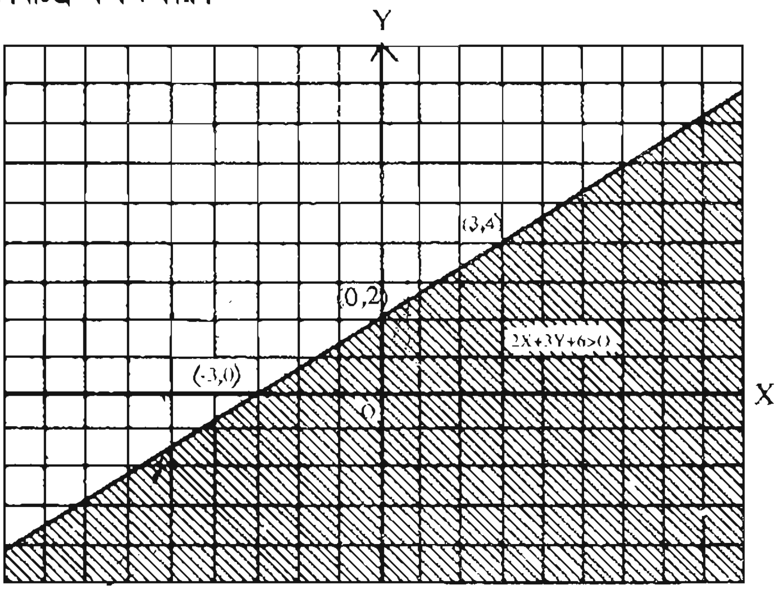
সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় :

$3y = 2x + 6$ বা, $y = \dfrac{2x}{3} + 2.$

এ লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি স্থানাঙ্ক :

x	0	–3	3
y	2	0	4

স্থানাঙ্কায়িত ছক-কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 2)$, $(-3, 0)$ $(3, 4)$ বিন্দুগুলো চিত্র স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



এখন মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y + 6$ রাশির মান 6, যা ধনাত্মক। সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির যে পার্শে মূলবিন্দু রয়েছে সেই পার্শের সকল বিন্দুর জন্যই $2x - 3y + 6 > 0$

অতএব, $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান-সেট $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমন্বয়ে গঠিত।

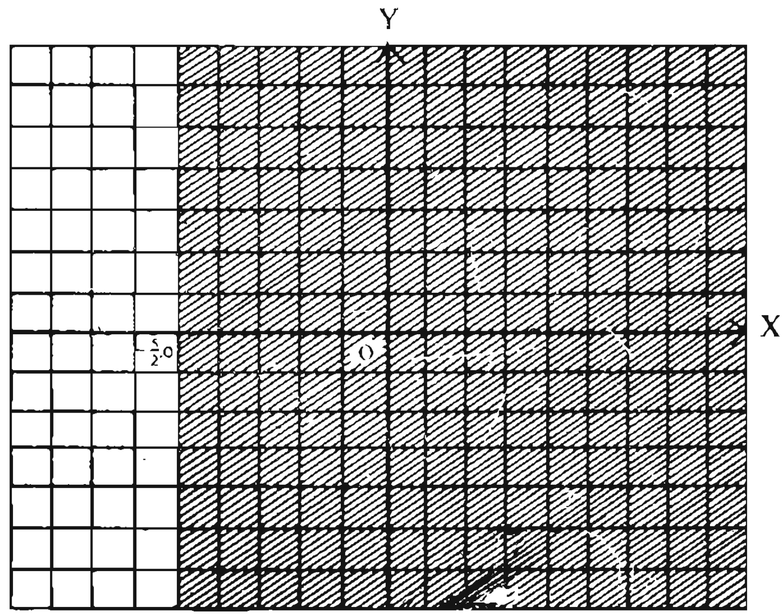
এই সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটিও অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ৪। (x, y) সমতলে, $-2x < 5$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $-2x < 5$ অসমতাটিকে এভাবে লেখা যায়।

$$2x + 5 > 0 \text{ বা, } 2x > -5 \text{ বা, } x > -\frac{5}{2}$$

এখন স্থানাঙ্কায়িত (x, y) সমতলে $x = -\frac{5}{2}$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(-\frac{5}{2}, 0)$ বিন্দু দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হল।



এই লেখচিত্র রেখার ডান পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $x = 0$ যা, $> -\frac{5}{2}$

সুতরাং লেখচিত্র-রেখার ডান পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত অসমতার সমাধান (লেখচিত্র-রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়)। সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু (যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটি অন্তর্ভুক্ত নয়)।

উদাহরণ ৫। $y \leq 2x$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $y \leq 2x$ অসমতাটিকে

$y - 2x \leq 0$ আকারে লেখা যায়।

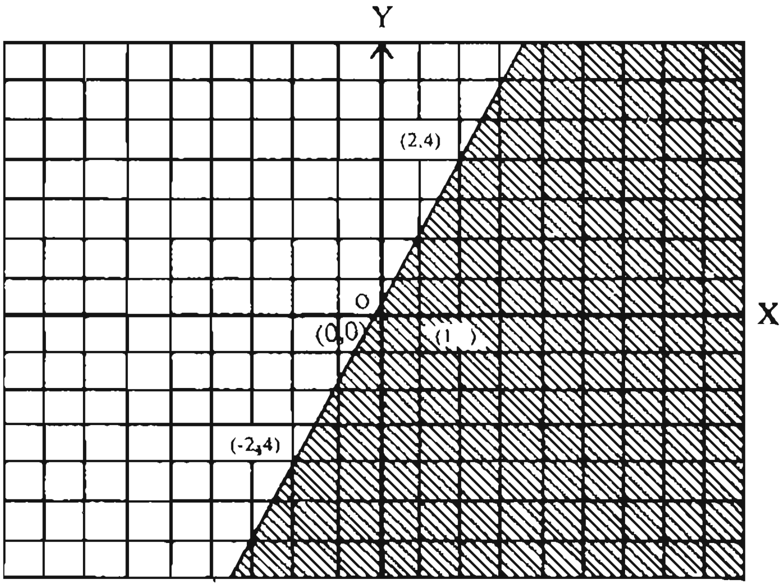
এখন $y - 2x = 0$

বা, $y = 2x$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	–2
y	0	4	–4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (0, 0), (2, 4) (–2, –4) বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হল।



(1, 0) বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "নিচের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে

$y - 2x = 0 - 2 \times 1 = -2 < 0.$

সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার নিচের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে (1, 0) বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

উদাহরণ ৬। $2x - 3y - 1 \geq 0$ এবং $2x + 3y - 7 \leq 0$ অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধান চিহ্নিত কর।

সমাধান : প্রথমে $2x - 3y - 1 = 0$ (1)

এবং $2x + 3y - 7 = 0$ (2)

সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(১) থেকে পাই,

$3y = 2x - 1$ বা, $y = \dfrac{2x-1}{3}$

এখানে,

x	5	–4	–1
y	3	–3	–1

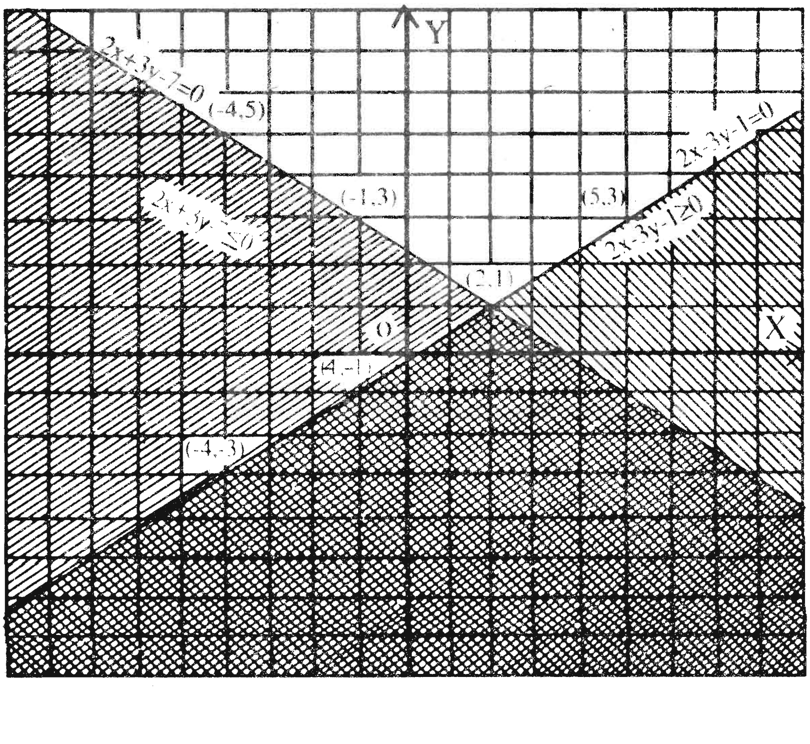
(২) থেকে পাই, $3y = -2x + 7$

বা, $y = \dfrac{-2x+7}{3}$

এখানে,

x	–1	2	–4
y	3	1	5

এখন স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (5, 3), (–4, –3), (–1, –1) বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x - 3y - 1 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা এবং (–1, 3), (2, 1), (–4, 5) বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x + 3y - 7 =$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y - 1$ রাশির মান $- 1$, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x - 3y - 1 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পার্শের সকল বিন্দুর জন্য $2x - 3y - 1 < 0$ এবং অপর পার্শের সকল বিন্দুর $2x - 3y - 1 \geq 0$. অতএব, লেখচিত্র রেখাটিসহ তার "নিচে" সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x - 3y - 1 > 0$ অসমতার লেখচিত্র। আবার, $(0, 0)$ তে $2x - 3y - 7$ রাশির মান $- 7$, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x + 3y - 7 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x + 3y - 7 < 0$. অতএব, লেখচিত্র রেখাটিসহ তার "নিচে" সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x + 3y - 7 \leq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশ্লিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতার দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

অনুশীলনী ৭.৪

১। নিম্নের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(i) $x - y > - 10$; (ii) $2x - y < 6$;

(iii) $3x - y \geq 0$; (iv) $3x - 2y \leq 12$;

(v) $y < - 2$; (vi) $x \geq 4$;

(vii) $y > x + 2$ (viii) $y < x + 2$.

(ix) $y \geq 2x$; (x) $x + 3y < 0$.

২। নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(i) $x - 3y - 6 < 0$ এবং $3x + y + 2 < 0$;

(ii) $x + y - 4 \leq 0$ এবং $2x - y - 3 \geq 0$;

(iii) $x - y + 3 > 0$ এবং $2x - y - 6 \geq 0$;

(iv) $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$;

(v) $x + 2y - 4 > 0$ এবং $2x - y - 3 > 0$;

(vi) $5x + 2y > 11$ এবং $7x - 2y > 3$;

(vii) $3x - 3y > 5$ এবং $x + 3y \leq 9$;

(viii) $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \geq 5$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। $3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$
উপরের সমীকরণ জোটের সমাধান (x, y) নিচের কোনটি ?

ক. $(4, 0)$ খ. $(0, 4)$
গ. $(-4, 0)$ ঘ. $(0, -4)$

২। $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$ সমীকরণ জোটের সমাধান $(x, y) =$ কত?

ক. $(4, 2)$ খ. $(0, 0)$
গ. $(-2, 4)$ ঘ. $(-4, -2)$

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৩। দ্বিতীয় সমীকরণে $y = 4$ হলে $x =$ কত?

ক. 3 খ. 2
গ. 4 ঘ. ± 2

৪। সমীকরণ জোটটি
i. দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট
ii. দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট
iii. দুই চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট
উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫। সমীকরণ জোটটির সমাধান $(x, y) =$ কত?

ক. $(2, \pm\frac{1}{2}), (-2, \pm\frac{1}{2})$
খ. $(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)$
গ. $(-\frac{1}{2}, -2), (2, -\frac{1}{2})$
ঘ. $(2, -\frac{1}{2}), (-2, -\frac{1}{2})$

সৃজশীল প্রশ্নাবলী
(৬ষ্ঠ ও ৭ম অধ্যায়)

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। 2, 3, 4 এবং 6 এর সাথে চলক x এর বিয়োগফলসমূহের ক্ষেত্রে তৃতীয় ও প্রথমটির অনুপাত হলো চতুর্থ ও দ্বিতীয়টির অনুপাত অপেক্ষা বড়।

ক. উল্লিখিত তথ্যকে গাণিতিক অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর। এক্ষেত্রে $x = 2$ হলে অসমতাটির কিরূপ হবে?

খ. উপস্থাপিত অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর এবং সংখ্যারেখায় প্রদর্শন কর।

গ. যদি চতুর্থ বিয়োগফলের পরমমান প্রথম বিয়োগফলের পরমমানের দ্বিগুণের সমান হয় তবে গঠিত সমীকরণটির সমাধান কর।

২। $(1+x)$ এবং $(1-x)$ রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকের ঘনমূলের সমষ্টি হলো 2 এর ঘনমূলের সমান।

ক. 27 এর ঘনমূল কত? উপরোল্লিখিত তথ্যের আলোকে একটি সমীকরণ তৈরি কর।

খ. গঠিত সমীকরণের সমাধান সেট উপস্থাপন কর।

গ. 4 এর $(1+x)$ তম ঘাত এবং $(1-x)$ তম ঘাত নেওয়া হলে এদের সমষ্টি 10 এর সমান হয়। সমীকরণ গঠন পূর্বক সমাধান কর এবং শুদ্ধি পরীক্ষা দেখাও।

৩। x ও y দুইটি চলরাশির ক্ষেত্রে $x > y > o$ এবং $x \geq 2y$ এছাড়া y এর x তম ঘাত হলো 4 এবং 2 এর x তম ঘাত হলো y এর বর্গের সমান।

ক. উল্লিখিত তথ্যের আলোকে সমীকরণ দুইটি গঠন কর।

খ. সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

গ. $x \geq 2y$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

অষ্টম অধ্যায়

অনন্ত ধারা

৮.১। অনুক্রম (Sequence)

1	2	3	4	5 ....n	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	4	6	8	10........2n	

উপরের বর্ণনায় লক্ষ করি যে, প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n এর সঙ্গে একটি অনন্য সংখ্যা 2n সংশ্লিষ্ট করা হয়েছে। এতে স্বাভাবিক সংখ্যা সেট N থেকে যোগবোধক জোড় সংখ্যা সেট এ একটি ফাংশন বর্ণিত হয়েছে। এই ফাংশনের অধীনে 1, 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি সকল স্বাভাবিক সংখ্যার প্রতিচ্ছবিগুলোকে ক্রমান্বয়ে পরপর লিখে 2, 4, 6, 8, 10, ... অনুক্রমটি পাওয়া যায়। এখানে "......." দ্বারা "এরূপ অন্তহীন ভাবে চলতে থাকবে" নির্দেশ করা হয়েছে। সাধারণভাবে, $u : N \rightarrow S$ কোনো ফাংশন হলে প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য একটি অনন্য $u(n) \in S$ নির্দিষ্ট হয়। অনেক সময় $u(n)$ স্থলে u_n (একে u -সাব -n পড়া হয়) লেখা হয়। এই u_n উপাদানগুলোকে ক্রমান্বয়ে u_1, u_2, u_3, ..., u_n,....... লিখে এরা S সেটে একটি অনুক্রম বর্ণনা করে বলা হয়। u_n কে এই অনুক্রমের n তম পদ বলা হয়।

উদাহরণ ১। 2, 4, 6, 10 .... 2n, ...

অনুক্রমের ১ম পদ $u_1 = 2$, ২য় পদ $u_2 = 4$, ৩য় পদ $u_3 = 6$ ইত্যাদি। সাধারণভাবে, n তম পদ $u_n = 2n$.

মন্তব্য। এখানে u প্রতীকের কোনো বিশেষত্ব নেই। u স্থলে v, t, x, f, A ইত্যাদি যে কোনো প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদাহরণ ২। 1, 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের 15 তম পদ, 1000 তম পদ এবং k তম পদ উল্লেখ কর।

সমাধান : লক্ষ করি যে, 1, 3, 5, 7, 9, ... একটি সমান্তর প্রগমন যার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর 2. সুতরাং k তম পদ $t_k = 1 + (k-1)2 = 2k - 1$ (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)

$k = 15$ ধরে 15 তম পদ $t_{15} = 2 \times 15 - 1 = 29$

1000 তম পদ $t_{1000} = 2 \times 1000 - 1 = 1999$.

৮.২ অনন্ত ধারা (Infinite series)

সংজ্ঞা : $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অনন্ত ধারা (Infinite series) এবং u_n কে এই ধারার n তম পদ বলা হয়।

উদাহরণ ১। নিচের প্রত্যেকটি অনন্ত ধারা :

(ক) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (খ) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots$

(গ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$ প্রত্যেক অনন্ত ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial sum) নির্ণয় করা যায়।

সংজ্ঞা : $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = u_1$, ২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = u_1 + u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ ইত্যাদি। এভাবে n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$. অর্থাৎ, কোন অনন্ত ধারার n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক (যেখানে $n \in N$) পদের সমষ্টি।

উদাহরণ ২। $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 + 2 = 3$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)।

দ্রষ্টব্য ১। উপরের উদাহরণে লক্ষ করি,

$$S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55;\ S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$$S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$$

$S_{10000} = \dfrac{10000 \times 10001}{2} = 50005000$ ইত্যাদি। এখানে n যত বড় হয় S_n এর মান তত বড় হয়। n এর মান যথেষ্ট বড় করে S_n এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। এক্ষেত্রে বলা হয় যে, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

উদাহরণ ৩। $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 0$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1$

৪র্থ আংশিক সমষ্টি $S_4 = 0$ ইত্যাদি। এভাবে অগ্রসর হয়ে দেখা যায় যে,

বিজোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$ এবং জোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 0$.

দ্রষ্টব্য ২। উপরের উদাহরণে এমন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না যাকে ধারাটির সমষ্টি বলা যায়।

উদাহরণ ৪। $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$,

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = 1\dfrac{1}{2}$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

এখানে S_n একটি ধারা যার প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2}$.

সুতরাং $S_n = \dfrac{1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)

দ্রষ্টব্য ৩। উপরের উদাহরণে লক্ষ করি যে, $n = 10$ হলে $\frac{1}{2^{n-1}} = (\frac{1}{2})^9 \approx 1.95 \times 10^{-3}$

$n = 100$ হলে $\frac{1}{2^{n-1}} = (\frac{1}{2})^{99} \approx 1.58 \times 10^{-30}$ ইত্যাদি। অর্থাৎ, n কে যথেষ্ট বড় করে $\frac{1}{2^{n-1}}$ যথেষ্ট ছোট করা যায়। তখন S_n এর মান 2 এর যথেষ্ট কাছাকাছি হয়। এ আলোচনা থেকে বলা হয় যে, আংশিক সমষ্টিগুলোর প্রান্তীয় মান (limiting value) 2। এই প্রান্তীয় মানকেই অনন্ত ধারাটির সমষ্টি বলা হয় এবং $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2$ লিখে করা হয়।

সংজ্ঞা। অনন্ত ধারা $u_1 + u_2 + u_3 + ...$

যদি এমন হয় যে যথেষ্ট বড় n এর জন্য ধারাটির আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ...u_n$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা s এর যথেষ্ট কাছাকাছি হয়, তবে s কে অনন্ত ধারাটির সমষ্টি বলা হয়।

৮.৩। অনন্ত গুণোত্তর ধারা

গুণোত্তর ধারার সঙ্গে আমরা আগেই পরিচিত হয়েছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। আমরা দেখেছি যে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r। পদগুলোকে $u_1, u_2, u_3,$ ইত্যাদি ধরে দেখা যায় যে, $u_1, = a, u_2 = ar, u_3 = ar_2$ ইত্যাদি এবং সাধারণভাবে $u_n = ar^{n-1}$ $(n \in N), r \neq 1$ হলে, এই গুণোত্তর ধারার n তম আংশিক সমষ্টি

$$\boxed{S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.}$$

লক্ষ করি,

(1) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মানকে যথেষ্ট ছোট করা যায় অর্থাৎ, 0 এর যথেষ্ট কাছাকাছি আনা যায়। এ থেকে বলা যায় যে, $|r| < 1$ হলে r^n এর প্রান্তীয় মান 0 হয় এবং ফলে,

$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$ এর প্রান্তীয় মান $S = \frac{a}{1-r}$ হয়।

সুতরাং এক্ষেত্রে $a + ar + ar^2 + ...$ অনন্ত ধারার সমষ্টি $\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$

(২) $|r| > 1$ হলে অর্থাৎ, $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মানকে যথেষ্ট বড় করা যায়। এ থেকে দেখা যায় যে, এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান (যখন n অনির্ধারিত ভাবে বড় হয়) ধরা যায়। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

(৩) $r = -1$ হলেও S_n এর কোনো প্রান্তীয় মান (যখন n অনির্ধারিত ভাবে বড় হয়) পাওয়া যায় না, কেননা $(-1)^n$ এর মান -1 (যখন n বিজোড়) এবং 1(যখন n জোড়) এর মধ্যে দোদুল্যমান হয়। সুতরাং এক্ষেত্রেও অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই;

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা। যদি $|r| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হয়, তবে অনন্ত গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$ এর সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r}$. r এর অন্য সকল মানের জন্য অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

মন্তব্য : অনন্ত গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (যখন থাকে) কে অনেক সময় S লিখে প্রকাশ করা হয় এবং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (sum up to infinity) বলা হয়।

অর্থাৎ, $S = a + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$ অসীমতক $= \dfrac{a}{1-r}$, যখন $|r| < 1$.

উদাহরণ ১। নিম্নোক্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর :

(ক) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots$ (খ) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots\ldots$ (গ) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{4}{5^3} - \dfrac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots$

সমাধান : (ক) এখানে $a = 1$ এবং $r = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$

(খ) এখানে $a = \dfrac{1}{3}$ এবং $r = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

(গ) এখানে $a = \dfrac{1}{5}$ এবং $r = -\dfrac{2}{5}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\dfrac{1}{5}}{1-(-\dfrac{2}{5})} = \dfrac{1}{7}$

পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

উদাহরণ ২। নিম্নের পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $\cdot\dot{5}$ (খ) $\cdot\dot{2}\dot{7}$ (গ) $2\cdot 3\dot{7}$ (ঘ) $1\cdot\dot{3}0\dot{5}$

সমাধান: (ক) $\cdot\dot{5} = \cdot 55 \ldots\ldots\ldots = \cdot 5 + \cdot 05 + \cdot 005 + \ldots\ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ $a = \cdot 5$ সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 1$

$$\therefore \cdot\dot{5} = \frac{a}{1-r} = \frac{\cdot 5}{1-(\cdot 1)} = \frac{\cdot 5}{\cdot 9} = \frac{5}{9}.$$

(খ) $\cdot\dot{2}\dot{7} = \cdot 272727 .... = \cdot 27 + \cdot 0027 + \cdot 000027 + ...,$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 27$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 01$

$$\therefore \cdot\dot{2}\dot{7} = \frac{a}{1-r} = \frac{\cdot 27}{1-(.01)} = \frac{\cdot 27}{\cdot 99} = \frac{3}{11}.$$

(গ) $2\cdot\dot{3}\dot{7} = 2\cdot 373737 .... = 2 + (\cdot 37 + \cdot 0037 + \cdot 000037 + ...)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 37$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 01$

$$\therefore 2\cdot\dot{3}\dot{7} = 2 + \frac{a}{1-r} = 2 + \frac{\cdot 37}{1-(.001)} = 2 + \frac{\cdot 37}{\cdot 99} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

(ঘ) $1\cdot\dot{3}0\dot{5} = 1\cdot 305305 ..... = 1 + (\cdot 305 + \cdot 000305 + ...)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 305$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 001$

$$\therefore 1\cdot\dot{3}0\dot{5} = 1 + \frac{a}{1-r} = 1 + \frac{\cdot 305}{1-(\cdot 001)} = 1 + \frac{\cdot 305}{\cdot 999} = 1 + \frac{305}{999} = \frac{1305}{999}.$$

অনুশীলনী ৮

১। প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর :

(ক) 1, 3, 5, 7, 9, ..., (খ) 3, 5, 7, 9, ...

(গ) অনুক্রমটির n তম পদ হল $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}$; (ঘ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

(ঙ) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, ...$; (চ) অনুক্রমটির n তম পদ হল $\frac{1-(-1)^n}{2}$

২। একটি অনুক্রমের n তম পদ হল $u_n = \frac{1}{n}$

(ক) $u_{10}, u_{100}, u_{1000}$ নির্ণয় কর।

(খ) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (যখন n যথেষ্ট বড় হয়) সম্পর্কে কী বলা যায়?

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

৪। প্রদত্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর :

(ক) $12 + 4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) $1 + \cdot 1 + \cdot 01 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(গ) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৫। x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

অনন্ত ধারার (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৬। প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিককে মূলদ ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর :

(ক) $\cdot\dot{4}$ (খ) $\cdot\dot{1}\dot{2}$ (গ) $\cdot 0\dot{1}\dot{2}\dot{3}$ (ঘ) $8\cdot\dot{5}\dot{1}$ (ঙ) $1\cdot\dot{2}\dot{3}\dot{1}$ (চ) $6\cdot\dot{4}0\dot{5}$

বহুনির্বাচনীও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের 10 তম পদ কত?

ক. 15 খ. 21

গ. 24 ঘ. 18

২। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $\frac{1}{5}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{7}$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

ক. $\frac{5}{2}$ খ. $\frac{2}{5}$

গ. $-\frac{2}{5}$ ঘ. $-\frac{5}{2}$

৩। i. 1 – 1 + 1 – 1 + 1 .... ধারার n তম আংশিক সমষ্টি 1; যখন n বিজোড়।

ii. 2 – 2 + 2 – 2 + 2.................... ধারার n তম আংশিক সমষ্টি 2; যখন n জোড়।

iii. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ .... ধারার তৃতীয় আংশিক সমষ্টি $\frac{7}{4}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$\frac{1}{(2x+1)}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+ \ldots\ldots$$

৪। ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি

ক. $\left|\frac{1}{2x+1}\right| > ০$

খ. $\frac{1}{|2x+1|} < ০$

গ. $|2x+1| < ০$

ঘ. $|2x+1| \geq ০$

৫। x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে?

ক. x < –1 অথবা x > 0

খ. x < 0 অথবা x >1

গ. x < 1 অথবা x > 0

ঘ. –1 < x < 0

৬। $x = 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. 2

গ. -2 ঘ. $-\frac{1}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $(1+y)^{-1}+(1+y)^{-2}+(1+y)^{-3}+$...................... একটি অনন্ত ধারা

ক. উপরের ধারাটি কোন ধরনের? ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. $Y = -\frac{1}{3}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর। ধারাটি দশতম পদ এবং প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. Y এর কোন শর্ত সাপেক্ষে প্রদত্ত ধারাটি অসীমতক সমষ্টি থাকবে? সেই সম্পর্কটি নির্ণয় কর।

২। $2+4+8+16+$...................একটি অনন্ত ধারা :

ক. প্রদত্ত অনন্ত ধারাটি কোন ধরনের ? প্রদত্ত ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি কত ?

খ. প্রদত্ত ধারাটির বিশতম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. $x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{x+1}$ হয়। এক্ষেত্রে ধারাটির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ লিখে অনন্ত ধারাটি গঠন কর। x- এ উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

নবম অধ্যায়

পরিসংখ্যান

৯.১। পরিসংখ্যান

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন রকম তথ্যসূচক সংখ্যার সম্মুখীন হই। এ সকল তথ্যসূচক সংখ্যা কোনো দেশের জনসংখ্যা, নারী-পুরুষের সংখ্যা, ব্যবসা-বাণিজ্যের লাভ-লোকসান, বৃষ্টিপাত, তাপমাত্রা ইত্যাদি তথ্য বুঝাতে পারে। যেমন, পৃথিবীর কয়েকটি বড় বড় শহরের ডিসেম্বর মাসের কোনো একদিনের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ তাপমাত্রার তালিকা দেওয়া হল :

শহরের নাম	সর্বনিম্ন তাপমাত্রা	সর্বোচ্চ তাপমাত্রা
১. ঢাকা	২১·১° সে ঃ	২৭·৪° সে ঃ
২. কলকাতা	২২·২° সে ঃ	২৮·৯° সে ঃ
৩. বোম্বে	২৬·৩° সে ঃ	৩২·৭° সে ঃ
৪. টোকিও	৮·২° সে ঃ	১৭·৮° সে ঃ
৫. লন্ডন	১১·৪° সে ঃ	২১·৫° সে ঃ
৬. নিউইয়র্ক	৭·৬° সে ঃ	১৮·০° সে ঃ
৭. দুবাই	২৭·১° সে ঃ	৩৭·৭° সে ঃ

এ সংখ্যাসূচক তথ্য থেকে ঐ দিন কোনো শহরে কী রকম শীত পড়েছিল তার একটি তুলনামূলক চিত্র পাওয়া যায়। এ তথ্যের উপর ভিত্তি করে টোকিওগামী একজন যাত্রী তার কী রকম পোশাক পরিচ্ছদের প্রয়োজন সে সম্পর্কে একটি ধারণা পেতে পারেন এবং তদনুযায়ী ব্যবস্থা গ্রহণ করতে পারেন। সুতরাং বিভিন্ন বিষয় বা ঘটনার সংখ্যাসূচক তথ্য কীভাবে পাওয়া যায় এবং কীভাবে ব্যবহার করতে হয় সে সম্বন্ধে ধারণা থাকা প্রয়োজন।

উপরে বর্ণিত তথ্যসূচক সংখ্যামালা একটি পরিসংখ্যান। তাপমাত্রা নির্দেশক সংখ্যাগুলো এই পরিসংখ্যানের উপাত্ত (Data)।

কোনো "ঘটনা" সম্পর্কিত সংখ্যামানের তথ্যাদিকে ঐ ঘটনার পরিসংখ্যান বলা হয়।

পরিসংখ্যানে বর্ণিত তথ্যাদি যে সংখ্যাগুলোর মাধ্যমে প্রকাশিত হয় তাদের ঐ পরিসংখ্যানের উপাত্ত বলা হয়। সাধারণত কোনো ঘটনা অনুসন্ধান করে এরূপ উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়।

বিভিন্ন উপাত্ত সংগ্রহ, বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য যে পদ্ধতি ও কলাকৌশল ব্যবহার করা হয়, তাকে পরিসংখ্যান পদ্ধতি বলা হয়।

পরিসংখ্যানের বৈশিষ্ট্য : পরিসংখ্যানের কতকগুলো মৌলিক বৈশিষ্ট্য হল :

১। পরিসংখ্যান সংখ্যায় প্রকাশিত তথ্য : পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সংখ্যায় প্রকাশ করতে হয়। গুণবাচক তথ্য পরিসংখ্যান নয়।

২। পরিসংখ্যান উপাত্তের সমষ্টি : কোনো বিচ্ছিন্ন সংখ্যাকে পরিসংখ্যান বলা যায় না। যেমন, একজন ছাত্রের ওজন ৫০

কেজি বলা হলে পরিসংখ্যান হয় না। কিন্তু একদল ছাত্রের গড় ওজন ৫০ কেজি বলা হলে পরিসংখ্যান হয়। কারণ, এটি একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের কতকগুলো সংখ্যার গড়।

৩। পরিসংখ্যান নির্দিষ্ট উদ্দেশ্য সম্পর্কিত : পরিসংখ্যানের উদ্দেশ্য সুস্পষ্ট ও পূর্ব নির্ধারিত হতে হয়। উদ্দেশ্য অনুযায়ী পরিসংখ্যানে উপাত্তসমূহ সংগ্রহ করতে হয়।

৪। পরিসংখ্যান তুলনাযোগ্য ও বিভিন্ন গ্রুপে বিন্যাসযোগ্য তথ্য : পরিসংখ্যান উপাত্ত এমনভাবে সংগ্রহ করতে হয় যেন তাদের মধ্যে তুলনা করা যায় এবং গ্রুপে বিন্যাস করা যায়। যেমন, কয়েকজন ছাত্রের উচ্চতা তুলনা করা যায় এবং একইভাবে কোনো জেলার কয়েকদিনের তাপমাত্রা তুলনা করা যায়।

৯.২। পরিসংখ্যান উপাত্ত সংগ্রহ ও উপস্থাপন

পরিসংখ্যান উপাত্ত দুই ধরনের। যেমন, (১) প্রাথমিক উপাত্ত (২) মাধ্যমিক উপাত্ত।

প্রাথমিক উপাত্ত : অনুসন্ধানকারী বা গবেষক নিজের পরিকল্পনা অনুযায়ী সরাসরি উৎস থেকে যে উপাত্ত সংগ্রহ করে তাকে প্রাথমিক উপাত্ত বলা হয়। প্রাথমিক উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা অনেক বেশি, কারণ অনুসন্ধানকারী নিজের গবেষণার প্রয়োজন অনুযায়ী এ উপাত্তসমূহ সংগ্রহ করে থাকেন। কিন্তু সময় ও অর্থের অভাবে অনেক সময় অনুসন্ধানকারীর পক্ষে প্রাথমিক উপাত্ত সংগ্রহ করা সম্ভব হয় না।

মাধ্যমিক উপাত্ত : অনুসন্ধানকারী অনেক সময় নিজের প্রয়োজনে অন্যের সংগৃহীত উপাত্ত ব্যবহার করে থাকেন। সুতরাং এরকম উপাত্তের উৎস পরোক্ষ। পরোক্ষ উৎস সরকার কর্তৃক সংগৃহীত পরিসংখ্যান, কোনো প্রতিষ্ঠান কর্তৃক সংগৃহীত উপাত্ত বা কোনো সাময়িকী থেকে প্রাপ্ত উপাত্ত হতে পারে। পরোক্ষ উৎস থেকে সংগৃহীত উপাত্তকে মাধ্যমিক উপাত্ত বলে। মাধ্যমিক উপাত্ত অন্য কোনো গবেষণামূলক কাজের জন্য সংগৃহীত। তাই এ উপাত্ত যখন অনুসন্ধানকারী নিজের প্রয়োজনে ব্যবহার করেন তখন এর নির্ভরযোগ্যতা অনেক কম।

পরিসংখ্যান উপাত্তের উপস্থাপন : সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলোর উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য, তথ্য ইত্যাদি জানার জন্য প্রয়োজন হয় উপাত্তের সারণিভুক্ত করা, আর সারণিভুক্ত করাকেই বলে উপাত্তের উপস্থাপন।

ধরা যাক, কোনো বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর শিক্ষার্থীর সংখ্যা 40 এবং কোনো পরীক্ষায় একটি বিষয়ে তাদের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

60, 65, 70, 75, 55, 62, 72, 78, 80, 68, 90, 85, 80, 82, 60, 62, 85, 80, 80, 98, 90, 86, 88, 91, 76, 77, 80, 82, 80, 75, 77, 84, 63, 66, 77, 79, 50, 58, 88, 91।

এখানে নম্বরগুলো অবিন্যস্তভাবে আছে। এ ধরনের উপাত্তসমূহকে অবিন্যস্ত উপাত্ত বলে। অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে কোনো স্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায় না। কিন্তু উপাত্তসমূহ যদি মানের অধঃক্রমে বা উর্ধ্বক্রমে সাজান যায় তবে কৃতিত্বের মান সম্বন্ধে ব্যাখ্যা দেওয়া সহজ হয়। সংগৃহীত নম্বরগুলো সাজিয়ে পাওয়া যায়,

50, 55, 55, 58, 60, 60, 62, 62, 63, 66, 68, 70, 72, 75, 75, 76, 77, 77, 77, 78, 79, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 82, 82, 84, 85, 85, 86, 88, 88, 90, 90, 91, 91, 98।

এভাবে সজ্জিত উপাত্তসমূহকে বিন্যস্ত উপাত্ত বলা হয়। উপাত্তসমূহ এভাবে বিন্যাস করা সময় সাপেক্ষ এবং বিরক্তিজনক। অধিকন্তু বিন্যাস করতে ভুল হওয়ার যথেষ্ট সম্ভাবনা থাকে।

সারণিবন্ধকরণ :

এখানে আলোচ্য নম্বরগুলো অধিকতর বোধগম্য করার জন্য এগুলোকে নিম্নোক্ত প্রকারে সারণিভুক্ত করা যায়।

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থী সংখ্যা
50	1	77	3
55	2	78	1
58	1	79	1
60	2	80	6
62	2	82	2
63	1	84	1
66	1	85	2
68	1	86	1
70	1	88	2
72	1	90	2
75	2	91	2
76	1	98	1
			মোট = 40

এ সারণি থেকে কতজন শিক্ষার্থী কোনো একটি নির্দিষ্ট নম্বর পেয়েছে তা সহজে বলা যায়। যেমন, 50 পেয়েছে 1 জন, 80 পেয়েছে 6 জন, 98 পেয়েছে 1 জন শিক্ষার্থী ইত্যাদি। আলোচ্য উপাত্তের বৈশিষ্ট্য হল শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বর যা সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। নম্বর হল উপাত্তের চলক এবং কোনো একটি নির্দিষ্ট নম্বর যত জন শিক্ষার্থী পেয়েছে তা হল চলকের গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা (Frequency)। উপরোল্লিখিত সারণি হল অবিন্যস্ত উপাত্তের 'গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি' (Frequency distribution)।

উপরোল্লিখিত গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্যের ব্যাখ্যা খুবই কঠিন। সেজন্য উপরিউক্ত উপাত্তসমূহকে শ্রেণীতে বিন্যস্ত করা প্রয়োজন। পূর্ব পৃষ্ঠায় উল্লিখিত উপাত্তসমূহ শ্রেণীতে বিন্যস্ত করে উপস্থাপন করা হল :

প্রাপ্ত নম্বর	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80	81-85	86-90	91-95	96-100
শিক্ষার্থী সংখ্যা গণসংখ্যা)	1	2	3	3	3	3	12	5	5	2	1

শ্রেণীতে সাজিয়ে এভাবে উপস্থাপিত উপাত্তের সারণিকে বিন্যস্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি বা সংক্ষেপে গণসংখ্যা সারণি বলে।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক

যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হতে পারে, তাকে বিচ্ছিন্ন চলক (discontinuous variable) বলা হয়। যেমন, পরীক্ষার নম্বর, জনসংখ্যা ইত্যাদি। যে চলকের মান যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, তাকে অবিচ্ছিন্ন চলক (continuous variable) বলা হয়। যেমন, তাপমাত্রা, বয়স, উচ্চতা, ওজন। অবিচ্ছিন্ন চালকের বৈশিষ্ট্য হল, এরূপ চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যে কোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অবিচ্ছিন্ন চলকের মানগুলো কার্যক্ষেত্রে আসন্ন মান নেওয়া হয় (বা নিতে হয়) বলে শ্রেণী বিন্যাসের ক্ষেত্রে বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলকের বিশেষ কোনো পার্থক্য করার প্রয়োজন হয় না।

শ্রেণী ব্যাপ্তি এবং শ্রেণী সীমা : কোনো শ্রেণীর সীমা নির্দেশক প্রতীক, যেমন উপরে উল্লিখিত সারণির 46–50 কে একটি শ্রেণী ব্যাপ্তি বলে। প্রাপ্ত সংখ্যা 46 ও 50 কে শ্রেণী সীমা বলে। ছোট সংখ্যা 46 হল এ শ্রেণীর নিম্ন সীমা এবং বড় সংখ্যা 50 হল এ শ্রেণীর উচ্চ সীমা। সারণি থেকে দেখা যায় যে, যে সকল শিক্ষার্থী 46–50 শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যে নম্বর পেয়েছে তাদের সংখ্যা 1 এবং যে সকল শিক্ষার্থী 51–55 শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যে নম্বর পেয়েছে তাদের সংখ্যা 2, ইত্যাদি।

সারণিতে প্রদত্ত শ্রেণীগুলো একে অন্যকে অধিক্রমণ (overlap) করেনি। তবে আলোচিত উদাহরণে কোনো নম্বর ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হয়নি। কিন্তু যখন উচ্চতা, দৈর্ঘ্য, ওজন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়, তখন উপাত্তগুলো মিটার ও কিলোগ্রামের ভগ্নাংশ হতে পারে। এ জন্য শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন (continuous) করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণীর উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণীর প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণীর প্রকৃত নিম্নসীমা তৈরি করা হয়। যেমন, উপরোল্লিখিত সারণির প্রথম শ্রেণীর প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 50·5 ও 45·5 এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 55·5 ও 50·5 ইত্যাদি।

শ্রেণী ব্যবধান : কোন শ্রেণীতে প্রকৃত উচ্চ সীমা ও নিম্ন সীমার পার্থক্য হল ঐ শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান। উপরিউক্ত ক্ষেত্রে, শ্রেণী ব্যবধান হচ্ছে 50·5–45·5 অর্থাৎ, 5।

শ্রেণী মধ্যমান : কোনো শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু হচ্ছে সেই শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান। শ্রেণীর উচ্চসীমা ও নিম্ন সীমার যোগফলকে ২ দিয়ে ভাগ করে এটি পাওয়া যায়। সুতরাং,

$$\text{শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান} = \frac{\text{উচ্চ সীমা} + \text{নিম্ন সীমা}}{2}$$

উপরিউক্ত নিবেশণের শ্রেণী মধ্যমান হল 48,53 ইত্যাদি।

শ্রেণী বিন্যাসের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত ধাপগুলো অনুসরণ করা হয় :

ধাপ ১। সংগৃহীত উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ করে পরিসর [উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের অন্তরফল হল পরিসর (range)] বের করা হয়।

ধাপ ২। শ্রেণী সংখ্যা নির্ধারণ করা হয়। এর জন্য কোনো নির্দিষ্ট নিয়ম নেই। তবে শ্রেণী সংখ্যা ৫ থেকে ১৫ এর মধ্যে সীমাবন্ধ করা হয়।

ধাপ ৩। শ্রেণী ব্যাপ্তি নির্ধারণের জন্য উপাত্তসমূহের পরিসরকে শ্রেণী সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয়। প্রাপ্ত ভাগফলের কাছাকাছি কোনো সংখ্যাকে শ্রেণী ব্যবধান হিসেবে নির্ধারণ করা হয়।

ধাপ ৪। সংগৃহীত উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের শ্রেণীভুক্ত নিশ্চিত করা হয়।

ধাপ ৫। শ্রেণী গণসংখ্যা নির্ধারণের জন্য সংগৃহীত উপাত্তসমূহের এক একটি সংখ্যা যে শ্রেণীতে পড়ে সে শ্রেণীর সামনে একটি টালি চিহ্ন (/) দেওয়া হয় এবং গণনার সুবিধার্থে ৫টি টালি চিহ্নের একটি গুচ্ছ তৈরি করা হয়। কোনো শ্রেণীর টালি চিহ্নের সংখ্যা হল সে শ্রেণীর গণসংখ্যার সাংখ্যমান।

উদাহরণ ১। 30 টি আমের ওজন (গ্রামে) নিচে দেওয়া হল। শ্রেণী ব্যবধান 10 নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর।

46, 55, 70, 65, 100, 95, 98, 112, 50, 56, 65, 85, 100, 90, 88, 87, 102, 113, 49, 67, 65, 85, 90, 102, 115, 93, 96, 85, 70, 75।

সমাধান : এখানে, সর্বনিম্ন সংখ্যামান 46 এবং সর্বোচ্চ সংখ্যামান 115। সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ সংখ্যামানের অন্তরফল $115 - 46 = 69$। যেহেতু $67 \div 10 = 6{\cdot}9$ সেহেতু শ্রেণী সংখ্যা 7 টি করা যায় যাদের ব্যবধান হবে 10।

প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি নিচে দেওয়া হল :

ওজন (গ্রামে)	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
46 – 55	////	4
56 – 65	////	4
66 – 75	////	4
76 – 85	///	3
86 – 95	~~////~~ //	6
96 – 105	~~////~~ /	6
106 –115	///	3
	মোট	30

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা **(Cumulative frequency)**

মনে করি, কোনো একটি উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির প্রথম শ্রেণীর গণসংখ্যা 3 এবং এর দ্বিতীয় শ্রেণীর গণসংখ্যা 5। সুতরাং দ্বিতীয় শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হল $3 + 5 = 8$। এভাবে প্রত্যেক শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় করা হয়। যে সারণিতে বিভিন্ন শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা বণ্টনের রীতি দেখানো হয়, তাকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি বলে। উদাহরণ ১ এর 30 টি আমের ওজনের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি নিম্নরূপ :

ওজন (গ্রামে)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
46 – 55	4	4
56 – 65	4	8(4 + 4)
66 – 75	3	12 (4 + 4 + 4)
76 – 85	6	15 (3 + 4 + 4 + 4)
86 – 95	7	21 (6 + 3 + 4 + 4 + 4)
96 – 105	6	27 (6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4)
106 – 115	3	30 (3 + 6 + 6+ 3 + 4 + 4 + 4)

এখানে লক্ষণীয় যে, শেষ শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে মোট গণসংখ্যা বা উপাত্ত সংখ্যা।

উদাহরণ ২। কোনো বিচ্ছিন্ন নিবেশণ শ্রেণী মধ্যমান হল 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102। শ্রেণী ব্যবধান ও শ্রেণী সীমা নির্ণয় কর।

সমাধান : শ্রেণী ব্যবধান = $52 - 47 = 5$। প্রথম শ্রেণীর মানগুলো হল 45, 46, 47, 48, 49।

$\therefore$ প্রথম শ্রেণীর শ্রেণী সীমা হল $45 - 49$।

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় শ্রেণীর শ্রেণী সীমা হল $50 - 54$।

সুতরাং শ্রেণী সীমাগুলো হবে $45 - 49$, $50 - 54$, $55 - 59$, $60 - 64$, $65 - 69$, $70 - 74$, $75 - 79$, $80 - 84$, $85 - 89$, $90 - 94$, $95 - 99$, $100 - 104$।

৯.৩। পরিসাংখ্যিক উপাত্তের চিত্রলেখ

পরিসাংখ্যিক উপাত্তসমূহ সারণিবন্ধ করার আলোচনা আগের অনুচ্ছেদে করা হয়েছে। কিন্তু পরিসাংখ্যিক উপাত্তসমূহ যদি চিত্রলেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বোঝা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য যেমন সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানে চিত্রলেখের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশণের উপস্থাপন বহুল প্রচলিত পদ্ধতি।

চিত্রলেখের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশণের উপস্থাপন নিয়ে আলোচনা করা হল :

আয়তলেখ বা গণসংখ্যা আয়তলেখ **(Histogram or frequency histogram)**

গণসংখ্যা নিবেশণের একটি চিত্রলেখ হচ্ছে আয়তলেখ বা গণসংখ্যা আয়তলেখ। আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নোক্ত পদক্ষেপ অনুসরণ করা হয় :

১। সুবিধাজনক স্কেলে x অক্ষ বরাবর শ্রেণী ব্যবধান লেখা হয় (শ্রেণী ব্যবধানগুলো অবিচ্ছিন্ন হতে হবে) এবং শ্রেণী ব্যবধানকে ভূমি ধরে আয়ত আঁকা হয়।

২। সুবিধাজনক স্কেলে y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নেওয়া হয় এবং গণসংখ্যা হয় আয়তের উচ্চতা। দুই অক্ষ বরাবর ধর্তব্য স্কেল যে সমান হতে হবে এমন কোন বাঁধা ধরা নিয়ম নেই। প্রতি অক্ষের জন্য সুবিধাজনক স্কেল নিতে হয়।

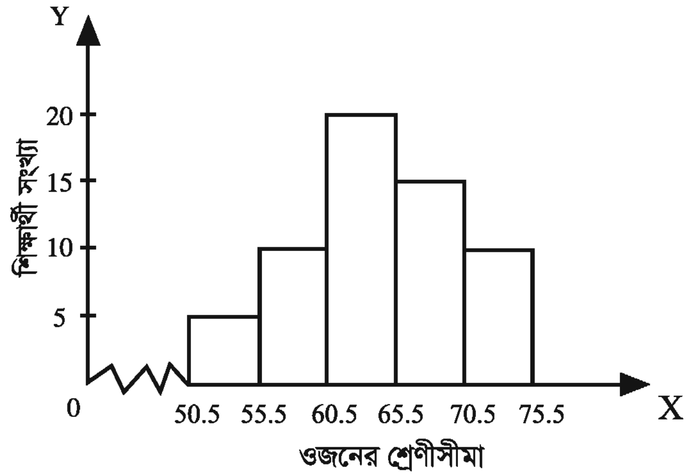
উদাহরণ ১। কোন স্কুলের 10ম শ্রেণীর 60 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (আসন্ন কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশণ হল :

ওজন (কিলোগ্রাম) :	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75
শিক্ষার্থীর সংখ্যা :	5	10	20	15	10

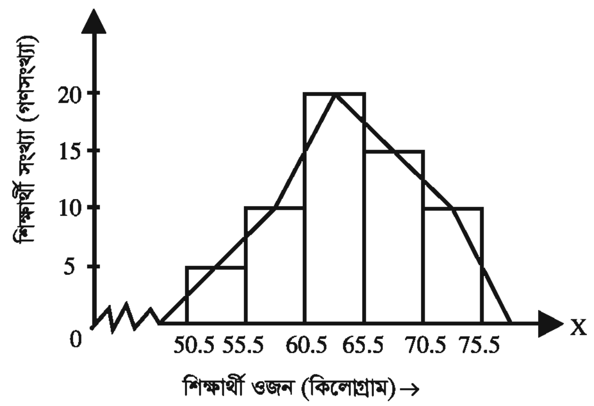
গনসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁক।

সামাধান : এখানে শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলো অবিচ্ছিন্ন নয় বিধায় এদেরকে অবিচ্ছিন্ন করে নিতে হবে। (সারণিতে উপস্থাপিত)

ওজন (কিলোগ্রাম)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীসীমা	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
51 - 55	50.5 - 55.5	5
56 - 60	55.5 - 60.5	10
61 - 65	60.5 - 65.5	20
66 - 70	65.5 - 70.5	15
71 - 75	70.5 - 75.5	10



x অক্ষ ও y বরাবর ছক কাগজের (Graph paper) প্রতি ঘরকে এক একক ধরে গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁকা হয়েছে। যেহেতু স্কেল x অক্ষ বরাবর 50.5 থেকে আরম্ভ সেহেতু x অক্ষের মূল বিন্দুর সন্নিকটে একটি ভাঙা চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়েছে যে, মূল বিন্দু থেকে 50.5 এর পূর্ব পর্যন্ত ঘরগুলো আছে।



গণসংখ্যা বহুভুজ : আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা যোগ করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়। আয়তলেখ সম্পূর্ণ করার জন্য আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় x অক্ষ বরাবর শূন্য গণসংখ্যার ব্যাপ্তির মধ্য বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করা হয়। উদাহরণ ১ এর আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ পার্শ্বে দেখানো হল :

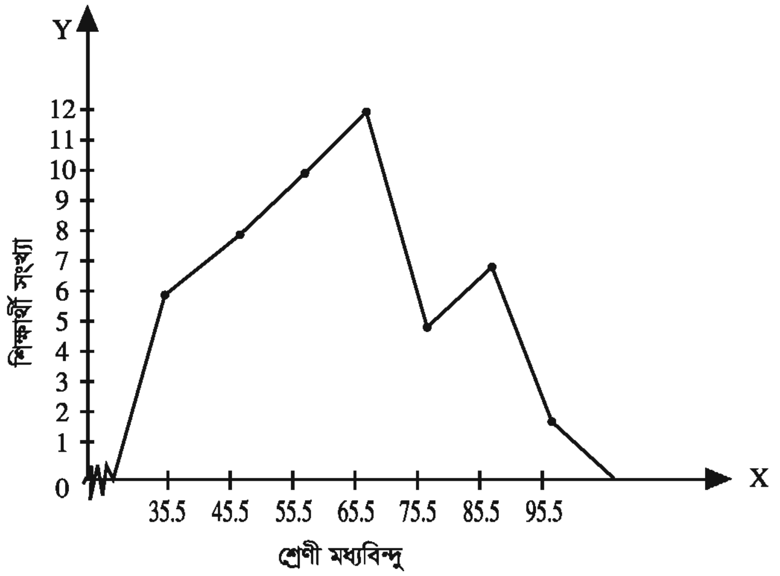
উদাহরণ ২। নবম শ্রেণীর 50 জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি দেওয়া হল। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

প্রাপ্ত নম্বর	31- 40	41- 50	51- 60	61-70	71- 80	81- 90	91-100	মোট
শিক্ষার্থী সংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2	50

সমাধান : শ্রেণীর মধ্যবিন্দু সমূহ থেকে বের করতে হবে। (সারণিতে উপস্থাপিত)

প্রাপ্ত নম্বর	শ্রেণী মধ্যবিন্দু	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
31 - 40	$\frac{31+40}{2} = 35.5$	6
41 - 50	45.5	8
51 - 60	55.5	10
61 - 70	65.5	12
71 - 80	75.5	5
81 - 90	85.5	7
91 - 100	95.5	2
		মোট $N = 50$

x অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের 5 ঘরকে শ্রেণী ব্যবধান (10 একক) এবং y অক্ষ বরাবর দুই ঘরকে একজন শিক্ষার্থী ধরে নিয়ে গণসংখ্যা বহুভূজ আঁকা হল।



ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা **(Cumulative Frequency Curve or an Ogive)**: কোনো উপাত্তের শ্রেণীকরণের পর শ্রেণী ব্যাপ্তির উচ্চসীমা x অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

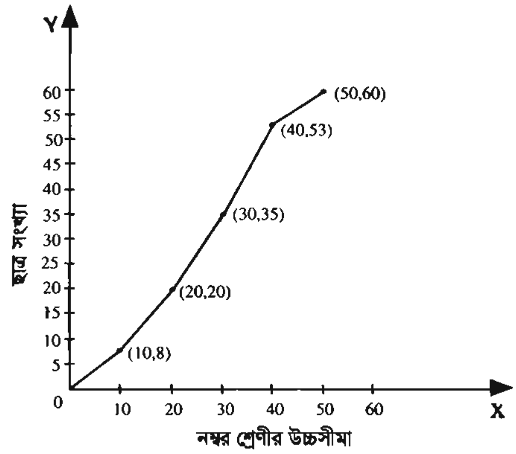
উদাহরণ ৩। কোনো শ্রেণীর 60 জন ছাত্রের 50 নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণের সারণি হল :

প্রাপ্ত নম্বর	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	মোট
ছাত্র সংখ্যা (গণসংখ্যা)	8	12	15	18	7	60

উল্লেখিত গণসংখ্যা নিবেশণের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হল:

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
1–10	8	8
11–20	12	20 (12 + 8)
21–30	15	35 (15 + 12 + 8)
31–40	18	53 (18 + 15 +12 +8)
41–50	7	60 (7 + 18 + 15 + 12 + 8)

x অক্ষ বরাবর ছক কাগজের দুই ঘরকে শ্রেণী ব্যাপ্তির উচ্চসীমার একক এবং y অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হয়েছে।



অনুশীলনী ৯.১

১। বিভিন্ন অর্থে পরিসংখ্যান বলতে কী বোঝ?

২। পরিসংখ্যানের মৌলিক বৈশিষ্ট্যসমূহ আলোচনা কর।

৩। প্রাথমিক ও মাধ্যমিক উপাত্ত বলতে কী বোঝ? এ দুই শ্রেণীর উপাত্তের মধ্যে কোন শ্রেণীর উপাত্ত অধিক বিশ্বাসযোগ্য এবং কেন?

৪। নিম্নোলিখিত পদগুলো (terms) বলতে কী বোঝ?
চলক; শ্রেণী ব্যাপ্তি; শ্রেণী পরিসর; শ্রেণী সাধারণ মান; শ্রেণীর গণসংখ্যা; শ্রেণী ব্যবধান 5 ধরে শ্রেণী সীমা; প্রকৃত শ্রেণী সীমা; ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

৫। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণীর 30 জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হল। গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।
82, 50, 55, 60, 80, 82, 75, 80, 60, 55, 56, 65, 75, 82, 90, 95, 100, 99, 80, 94, 50, 57, 68, 77, 90, 83, 93, 57, 60, 96.

৬। কোনো শ্রেণীর ৩০ জন ছাত্রের প্রদত্ত চাঁদা (টাকায়) নিচে দেওয়া হল। শ্রেণী ব্যবধান 10 ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।
32, 30, 54, 45, 78, 74, 108, 112, 66, 76, 40, 88, 20, 14, 15, 35, 44, 66, 75, 95, 84, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 34, 14, 44.

৭। একটি ঝুড়ি থেকে এলোমেলোভাবে ৪০টি আম সাহানাকে দেওয়া হল। আমগুলোর ওজন (গ্রামে) নিচে দেওয়া হল। গণসংখ্যা ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা তৈরি কর।
55, 45, 30, 110, 75, 40, 60, 100, 65, 40, 100, 75, 70, 60, 70, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 55, 65, 45, 85, 30, 90, 85, 75, 75, 70, 110, 100, 80, 70, 30, 55, 70.

৮। কোনো এক সালে একটি এলাকার অনূর্ধ্ব 50 বছর বয়সের লোকের বয়সের (বছর) গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি হল:

বয়স (বছরে)	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
গণসংখ্যা	11	32	51	49	27	6	4

(ক) দ্বিতীয় শ্রেণী ব্যাপ্তির নিম্ন সীমা লেখ।
(খ) চতুর্থ শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান নির্ণয় কর।
(গ) শ্রেণী ব্যবধান নির্ণয় কর।
(ঘ) ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

৯। শ্রেণীর শ্রেণী সাধারণ মান হল 104, 114, 124, 134, 144, 154 ও 164।
শ্রেণী ব্যবধান এবং শ্রেণী সীমা নির্ণয় কর।

১০। নিম্নোক্ত উপাত্তের জন্য আয়তলেখ আঁক :

প্রাপ্ত নম্বর	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
ছাত্র সংখ্যা	5	10	25	35	15

১১। ১০০ জন লোকের উচ্চতার (সে.মি.) নিবেশণ সারণি নিচে দেওয়া হল। এ গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ ও গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি)	146–155	156–165	166–175	176–185	186–195
গণসংখ্যা	5	35	25	15	20

১২। প্রশ্ন ১১ এর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং এ উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা আঁক।

১৩। একটি সমস্যা সমাধানে ২৫ জন ছাত্রীর প্রত্যেকের যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা হল-

16, 26, 20, 30, 27, 28, 33, 37, 38, 40, 46, 42, 43, 46, 46, 48, 49, 50, 59, 58, 53, 20, 60, 64, 52.

(ক) শ্রেণী ব্যবধান 10 ধরে গণসংখ্যা, ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

(খ) গণসংখ্যা নিবেশণের একটি আয়তলেখ ও গণসংখ্যার বহুভুজ আঁক।

(গ) ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশণের একটি অজিভ রেখা আঁক।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measures of Central Tendency)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির মাধ্যমে উপস্থাপন করার পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে এবং সহজে বোধগম্য করার জন্য আয়তলেখ, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা ইত্যাদি আলোচনা করা হয়েছে। এগুলো পরিসংখ্যানের অনেক প্রয়োজনীয় উদ্দেশ্য সাধন করে। তবুও ক্ষেত্র বিশেষে অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহের আরও সংক্ষিপ্ত করার প্রয়োজন দেখা দেয় এবং সাধারণভাবে উপাত্তসমূহের বৈশিষ্ট্য গাণিতিকভাবে পরিমাপ করার দরকার হয়। যেমন, কোনো শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের গণিতের প্রাপ্ত নম্বর মানের ক্রমানুসারে সাজালে দেখা যায় যে, নম্বরগুলো কোনো একটি বিশেষ নম্বরের কাছাকাছি পুঞ্জিভুত হয়। যে নম্বরকে কেন্দ্র করে নম্বরগুলো কেন্দ্রীভূত হয়, সেই নম্বর সমস্ত নম্বরের প্রতিনিধিত্ব করে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা

অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিবদ্ধ করলে নিবেশণের মাঝামাঝি একটি শ্রেণীর গণসংখ্যা খুবই বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার ঝোঁক বা প্রবণতাকেই কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। কেন্দ্রীয় মান উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্বকারী একটি সংখ্যা এবং এর দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হল :

(১) গাণিতিক গড় বা গড়, (২) মধ্যমা, (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)

সংগৃহীত উপাত্তসমূহের চলকের মানের সমষ্টিকে যদি চলকের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে গাণিতিক গড় পাওয়া যায়। মনে করি, অবিন্যস্ত, চলক x এর সংখ্যা n এবং x_1, x_2 ...., x_n চলকের মান। যদি চলকের গড় মান $\bar{x}$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

এখানে $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$ অর্থাৎ, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ দ্বারা চলকের মানসমূহের সমষ্টি বোঝায়। x এর কিছু সংখ্যক মান $\overline{x}$ এর কম এবং কিছু সংখ্যক মান $\overline{x}$ এর বেশি। তাই এটি সকল মানের মধ্যমান এবং এর থেকে বলা যায় যে, $\overline{x}$ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ।

উদাহরণ ১। 50 নম্বরের মধ্যে অনুষ্ঠিত পরীক্ষায় কোনো শ্রেণীর 20 জন শিক্ষার্থীর গণিতের প্রাপ্ত নম্বর হল : 40, 41, 45, 18, 41, 20, 45, 41, 45, 25, 20, 40, 18, 20, 45, 47, 48, 48, 49, 19. প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $n = 20$ এবং নম্বরের বিভিন্ন মান হল $x_1 = 40, x_2 = 41, x_3 = 45$ ইত্যাদি। যদি গাণিতিক গড় নম্বর $\overline{x}$ হয়, তবে $\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{715}{20} = 35.75$ (এখানে প্রাপ্ত নম্বরগুলোর সমষ্টি = 715)।

$\therefore$ প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় = 35.75।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অবিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়

n এর মান বেশ বড় হলে সংখ্যাগুলো সব যোগ করে গড় নির্ণয় করা বেশ অসুবিধাজনক এবং এতে ভুলের সম্ভাবনাও যথেষ্ট। এরকম ক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হচ্ছে সংখ্যাগুলো ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে তাদের গড় কত হতে পারে তা অনুমান করা । উপরের উদাহরণে বোঝা যায় যে, গড় সম্ভবত 30 এর বেশি কিন্তু 40 এর কম হবে। আমরা অনুমিত গড় 30 ধরে নিচ্ছি। এখন প্রত্যেকটি সংখ্যা x থেকে এই অনুমিত গড় a বিয়োগ করি। সংখ্যাটি 30 এর বড় হলে বিয়োগফল x_i - a ধনাত্মক, 30 এর ছোট হলে বিয়োগফল x_i - a ঋণাত্মক হবে। মূল সংখ্যাগুলো এবং এই বিয়োগফলগুলো সারণির আকারে পাশাপাশি লিখি।

উপাত্ত (xi)	(উপাত্ত- অনুমিত গড়) = (xi−a)	ক্রমযোজিত সমষ্টি
40	10	10
41	11	21
45	15	36
18	−12	24
41	11	35
20	−10	25
45	15	40
41	11	51
45	15	66
25	−5	61
20	−10	51

40	10	61
18	−12	49
20	−10	39
45	15	54
47	17	71
48	18	89
48	18	107
49	19	126
19	−11	115

$$\sum (xi-a) = 115$$

এরপর সকল বিয়োগফলের বীজগাণিতিক সমষ্টি (অর্থাৎ, চিহ্নযুক্ত সংখ্যা হিসেবে এদের যোগফল) নির্ণয় করি। পরপর দুইটি করে বিয়োগফল যোগ করলে এই সমষ্টি নির্ণয় অতি সহজ হয় এবং এ কাজ সারণিতে নিষ্পন্ন করা যায়। যেমন, এই উদাহরণে,

$10 + 11 = 21, 21 + 15 = 36, 36 + (-12) = 24$ ইত্যাদি।

এই উদাহরণে, $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)$, অর্থাৎ বিয়োগফলগুলোর সমষ্টি = 115.

$\therefore$ বিয়োগফলগুলোর গড় = $\frac{115}{20} = 5{\cdot}75$

$\therefore$ প্রকৃত গড় = অনুমিত গড় + বিয়োগফলগুলোর গড়

$= 30 + 5{\cdot}75$

$= 35{\cdot}75$

মন্তব্য ১। $u_i = x_i - a$ লিখলে আমরা প্রমাণ করব যে,

$\bar{x} = a + \bar{u}$, যেখানে $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ এবং $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$

প্রমাণ : $u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

$= (x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - a) = (x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n) - na$

সুতরাং

$$\frac{u_i + u_2 + u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n} - a$$

অর্থাৎ, $\bar{u} = \bar{x} - a$, বা $\bar{x} = a + \bar{u}$,

মন্তব্য ২। প্রকৃত গড় $\bar{x}$ অনুমিত গড় a এর উপর নির্ভর করে না। শিক্ষার্থীকে উপরের উদাহরণে $a = 40$ বা $a = 35$ ধরে নিয়ে নতুনভাবে নির্ণয় করে এর সত্যতা যাচাই করার পরামর্শ দেওয়া হল।

অনুমিত গড় প্রকৃত গড়ের যত কাছাকাছি হবে, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের কাজ ততই সহজ হবে।

বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড়

উদাহরণ ১ এ 20 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর যে স্বতন্ত্র তা নয়। একাধিক শিক্ষার্থী একই নম্বর পেয়েছে। প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি হল :

প্রাপ্ত নম্বর x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা (গণসংখ্যা) f_i	f_ix_i
18	2	36
19	1	19
20	3	60
25	1	25
40	2	80
41	3	123
45	4	180
47	1	47
48	2	96
49	1	49
k=10	$\sum_{i=1}^{10} f_i = n = 20$	$\sum f_ix_i = 715$

প্রাপ্ত নম্বরের গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \dfrac{715}{20} = 35{\cdot}75.$

সংজ্ঞা ১। (বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড়) যদি n সংখ্যক উপাত্তের k সংখ্যক মান $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_k$ এর গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2 \ldots\ldots, f_k$ হয়, তবে উপাত্তের গাণিতিক গড়

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_ix_i \text{ , যেখানে } n = \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ গণসংখ্যার সমষ্টি}$$

এই সূত্রের সাহায্যে গণসংখ্যা নিবেষণের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি নিচের উদাহরণে দেখানো হল।

উদাহরণ ২। নিচে কোনো একটি শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের সংখ্যা নিবেশণ দেওয়া হল :

প্রাপ্ত নম্বর	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94
শিক্ষার্থী সংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

উপরোল্লিখিত তথ্যমালার গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রত্যেক ছাত্রের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা নির্ণয় করা যায় না। তাই প্রত্যেক শ্রেণীর শ্রেণীমধ্যমান (Class midvalue) নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। মনে করি, শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের চলক x_i গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ :

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
25-34	29·5	5	147·5
35-44	39·5	10	395·0
45-54	49·5	15	742·5
55-64	59·5	20	1190·0
65-74	69·5	30	2085·0
75-84	79·5	16	1272·0
85-94	89·5	4	358·0
মোট		100	6190·0

$\therefore$ নির্ণেয় গাণিতিক গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i} = \dfrac{6190}{100} = 61·9.$

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে শ্রেণীবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় :

অবিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির অনুরূপ একটি সহজ পদ্ধতি শ্রেণীবিন্যাসকৃত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের জন্যও রয়েছে।

এ পদ্ধতিতে নির্ণেয় গড় $\bar{x} = a + h\bar{u}$, যেখানে $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i$ এবং $\bar{u} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} f_i u_i$

k = মোট শ্রেণীর সংখ্যা এবং $n = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i$ = উপাত্তের মোট সংখ্যা।

সূত্রের প্রমাণ :

$u_i = \dfrac{x_i - a}{h} \Rightarrow x_i = a + hu_i, \Rightarrow f_i x_i = f_i a + h f_i u_i.$

এখানে $i = 1, 2 \ldots\ldots, k$ বসিয়ে প্রাপ্ত মানগুলো যোগ করে পাই,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right) a + h\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)$$

অর্থাৎ, $n\overline{x} = na + hn\,\overline{u}$, কেননা

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n,\ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \text{ এবং } \overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i \quad \therefore\ \overline{x} = a + h\overline{u}.$$

উদাহরণ ৩। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উদাহরণ ২ এর উপাত্তগুলোর গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সম্পূর্ণ কাজ সারণির আকারে নিচে দেখানো হল।

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান	গণসংখ্যা f_i	u_i	$f_i u_i$
25-34	29·5	5	-3	-15
35-44	9·5	10	-2	-20
45-54	49·5	15	-1	-15
55-64	59·5	20	0	0
65-74	69·5	30	1	30
75-84	79·5	16	2	32
85-94	89·5	4	3	12
k = 7		n = 100		$\sum_{i=1}^{k} f_i u_i = 24$

এখানে মধ্যবর্তী শ্রেণী হচ্ছে 55- 64, যার শ্রেণী মধ্যমান 59.5 সুতরাং a = 59.5 ধরে $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ (এখন h = 10) নির্ণয় করি; এই মানগুলো হচ্ছে যথক্রমে -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. প্রতি শ্রেণীর জন্য $f_i u_i$ নির্ণয় করি। এদের সমষ্টি

$$\sum_{i=1}^{k} f_i u_i = 24 \text{ (এখানে } k = 7) \ \therefore\ \overline{u} = \frac{24}{100} = 0.24 \text{ (এখানে } n = 100)$$

ফলে $\overline{x} = 59.5 + 0.24 \times 10 = 59.5 + 24 = 61.9$

উদাহরণ ৪। কোনো কারখানার অনুর্ধ্ব ৫০ বছর শ্রমিকদের বয়সের গণসংখ্যা নিবেশণ নিম্নরূপ। তাদের বয়সের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণ সংখ্যা	3	13	21	15	5	4	2

সমাধান : শ্রেণী ব্যাপ্তির শ্রেণী মান যথাক্রমে 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47.

মনে করি, $a = 32$ এখানে $h = 5$.

গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি :

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান	শ্রেণী গণসংখ্যা f_i	$u_i = \frac{x_i - 32}{5}$	$f_i u_i$
15 - 19	17	3	-3	-9
20 - 24	22	13	-2	-26
25 - 29	27	21	-1	-21
30 - 34	32	15	0	0
35 - 39	37	5	+1	+5
40 - 44	42	4	+2	+8
45 - 49	47	2	+3	+6
k = 7		n = 63		-37

$$\therefore \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i u_i = \frac{1}{63}(-37) = -0.587$$

$\therefore \bar{x} = a + h\bar{u} = 32 + 5(-0.587) = 29.06$ $\therefore$ বয়সের গাণিতিক গড় = 29.06 বছর।

গুরুত্ব প্রদত্ত (Weighted) উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়

অনেক ক্ষেত্রে চলক x এর মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. একেকটি কারণ দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এক্ষেত্রে চলকের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. এর সাথে এদের গুরুত্ব/ভার (কারণ) $w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_n$ বিবেচনায় এনে গুরুত্ব প্রদত্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

সংজ্ঞা। যদি চলক x এর n সংখ্যক মান হয় $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. এবং এদের গুরুত্ব যদি হয় w_1, $\ldots\ldots\ldots, w_n$ তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে $\bar{x}_w = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

উদাহরণ ৫। কোনো কলেজের বিভিন্ন বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণীতে পাশের হার ও ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা দেওয়া হল। উক্ত কলেজের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণীতে পাশের হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	পাশের হার (শতকরায়)	ছাত্রছাত্রী সংখ্যা
গণিত	70	80
পরিসংখ্যান	80	120
ইংরেজি	50	100
বাংলা	90	225
প্রাণিবিদ্যা	60	135
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300

সমাধান : মনে করি, পাশের হারের চলক x. পাশের হারের পাশাপাশি ছাত্রছাত্রী সংখ্যা দেওয়া আছে। সুতরাং পাশের হারের ভার হল ছাত্রছাত্রী সংখ্যা। মনে করি, ছাত্রছাত্রী সংখ্যার চলক w.

গুরুত্ব প্রদত্ত গড় নির্ণয়ের সারণি :

বিভাগের নাম	x_i	w_i	$w_i x_i$
গণিত	70	80	5600
পরিসংখ্যান	80	120	9600
ইংরেজি	50	100	5000
বাংলা	90	225	20250
প্রাণিবিদ্যা	60	135	8100
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300	25500
মোট		960	74050

$$\bar{x}_w = \frac{\sum\limits_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} = \frac{74050}{960} = 77{\cdot}14 \quad \therefore \text{ উত্তর ঃ পাশের গড় হার } 77.14\%$$

মধ্যক (Median)

গাণিতিক গড় দেখে অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহের প্রকৃতি বা বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে কোনো সিদ্ধান্ত নেওয়া অনেক সময় সম্ভব হয় না। যেমন কোনো 5 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হল- 30, 30, 30, 90, 100. প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় হল 56. শেষের নম্বরের জন্য গাণিতিক গড় 56 হয়েছে। কিন্তু এর থেকে ছাত্রদের গণিতের কৃতিত্ব সম্বন্ধে যদি বলা হয় মোটামুটি ভাল, তবে এ সিদ্ধান্ত বাস্তবের সাথে সামঞ্জস্যপর্ণ হবে না। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের জন্য এ গড় যথাযথ নয়। এজন্য অন্য কোনো গড়ের প্রয়োজন হয়। এখানে যদি আমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ 30 নিই তবে তা বেশি সংখ্যক ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ হবে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার এ পরিমাপ হল মধ্যক।

সংজ্ঞা। মধ্যক : যদি উপাত্তের মানগুলো মানের উর্ধ্বক্রমে বা নিম্নক্রমে সাজানো হয় তবে সজ্জিত মানসমূহের মধ্যম মানকে মধ্যক বলা হয়।

অবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় : প্রথমে অবিন্যস্ত উপাত্তের মানসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজান হয়। তারপর সজ্জিত মানসমূহের মধ্যম মানকে হিসেবে নেওয়া হয়। যদি উপাত্তের চলকের n সংখ্যক মান থাকে (n বিজোড় হয়), তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদ। এ ক্ষেত্রে কেবল একটি মধ্যক হবে। আর যদি n জোড় সংখ্যা হয়, তবে দুইটি মধ্যম মান থাকবে অর্থাৎ, মধ্যম মানের পদ দুইটি হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ। এদের যে কোনো একটিকে মধ্যক হিসেবে নেওয়া যায়। তবে প্রচলিত পদ্ধতিতে মধ্যম মানের গাণিতিক গড়কে মধ্যক হিসেবে নেওয়া হয়।

উদাহরণ ৬। নিম্নে প্রদত্ত মানসমূহের মধ্যক নির্ণয় কর।

4, 1, 6, 3, 8, 7, 2, 9, 12, 2, 3, 8, 15.

সমাধান : মানের উর্ধ্ব ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায় 1, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 9, 12, 15.

এখানে মানের সংখ্যা 13. সুতরাং 7 তম পদ হল মধ্যম পদ যার মান 6.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 6.

উদাহরণ ৭। চলকের মান 6, 1, 7, 2, 3, 7, 8, 7, 10, 16. হলে, মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান : মানের উর্ধ্বক্রমে সাজালে পাওয়া যায় 1, 2, 3, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 16.

এখানে পদের সংখ্যা 10. সুতরাং $\frac{10}{2}$তম এবং $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম অর্থাৎ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ দুইটি মধ্যম পদ যাদের মান যথাক্রমে 7 ও 7. এ দুইটির গাণিতিক গড় হল 7. সুতরাং মধ্যক হল 7.

শ্রেণী বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় :

উপাত্তসমূহ যদি শ্রেণী নিবেশণ সারণিতে সাজানো থাকে তবে মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র হচ্ছে :

$$\text{মধ্যক} = \frac{L + \frac{n}{2} - cuf}{f_m} \times h$$

n = মোট গণসংখ্যা
L = মধ্যক শ্রেণীর নিম্নসীমা
fm = মধ্যক শ্রেণীর গণসংখ্যা
h = মধ্যক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান
cuf = মধ্যক শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহের গণসংখ্যা সমষ্টি

উদাহরণ ৮। উদাহরণ ৪ এর শ্রেণী নিবেশণ এর মধ্যক নির্ণয় :

নম্বর	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীসীমা	গণসংখ্যা, f_i	যোজিত গণসংখ্যা
15 – 19	14.5 – 19.5	3	3
20 – 24	19.5 – 24.5	13	16
25 – 29	24.5 – 29.5	21	37
30 – 34	29.5 – 34.5	15	52
35 – 39	34.5 – 39.5	5	57
40 – 44	39.5 – 44.5	4	61
45 – 49	44.5 – 49.5	2	63

$$\text{মধ্যক} = L + \frac{\frac{n}{2} - cuf}{f_m} \times h$$

$$= 24{\cdot}5 + \frac{31.5 - 26}{21} \times 5$$

$$= \frac{5.5 \times 5}{21}$$

$$= 25{\cdot}81$$

প্রচুরক (Mode)

উপাত্তের মানসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজানো হলে দেখা যায় মাঝামাঝি একটি মানের চতুর্দিকে উপাত্তের মানের ঘনত্ব বেশি। প্রকৃতপক্ষে কোনো মানবিশিষ্ট একটি চলকের পুনরাবৃত্তির জন্যই এরূপ পরিস্থিতির উদ্ভব ঘটে। তাই এই মানটি উপাত্তের বৈশিষ্ট্য পরিমাপক হিসেবে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে এবং একে প্রচুরক বলে। সাধারণত কোনো চলকের যে মানটি সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত হয়, তাকেই প্রচুরক বলে। কোনো উপাত্তে প্রচুরক নাও থাকতে পারে। আবার থাকলেও প্রচুরক অনন্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ ৮। কোনো উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 2, 2, 3, 6, 7, 7, 7, 8, 9. এদের প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে 7 সর্বাধিক তিন বার উপস্থাপিত হয়েছে। সুতরাং প্রচুরক হল 7.

উদাহরণ ৯। উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 2, 4, 6, 9, 8, 15. প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : উপাত্তের চলকসমূহের কোনো মানই পুনরাবৃত্তি হয়নি। সুতরাং প্রদত্ত উপাত্তে প্রচুরক অনুপস্থিত।

উদাহরণ ১০ : উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 25, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 30, 30, 30. প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে 27 ও 30 সর্বাধিক তিনবার উপস্থাপিত হয়েছে সুতরাং প্রচুরক 27 ও 30.

শ্রেণী নিবেশণ থেকে প্রচুরক নির্ণয় পদ্ধতি :

উপাত্তসমূহ যদি শ্রেণী নিবেশণ সারণিতে সাজানো থাকে তবে প্রচুরক নির্ণয়য়ের সূত্র হচ্ছে

প্রচুরক = $L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

L = প্রচুরক শ্রেণীর নিম্নসীমা

h = প্রচুরক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান

f_1 = প্রচুরক শ্রেণী ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা পার্থক্য

f_2 = প্রচুরক শ্রেণী ও তার পরবর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা পার্থক্য

উদাহরণ ১১। উদাহরণ 8 এর শ্রেণী নিবেশণ এর প্রচুরক নির্ণয় :

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h = 24{\cdot}5 + \frac{6}{6+8} \times 5 = 26{\cdot}64$$

$L = 24{\cdot}5,\ f_1 = 21 - 15 = 6$

$f_2 = 21 - 13 = 8,\ h = 5$

[বিকল্প পদ্ধতি : প্রচুরক ৩ × মধ্যক – ২ × গড়]

অনুশীলনী ৯.২

১। কোনো এলাকার 25 টি পরিবারের শিশুর সংখ্যা হল :

4, 1, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 0, 5, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 0, 4, 1. শিশুদের সংখ্যার গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।