চতুর্থ অধ্যায়

# সূচক ও লগারিদম

## ৪.১। মূলদ সূচক

মূলদ সূচক সম্বলিত $a^m$ আকারের প্রতীকের সঙ্গে আমরা ইতঃপূর্বে পরিচিত হয়েছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য), যেখানে $a$ কে ভিত্তি (base) এবং $m$ কে সূচক (exponent) বলা হয়। $a^m$ কে $a$ এর $m$ ঘাত বা শক্তি (Power) বলা হয় এবং $a$ ঘাত $m$ পড়া হয়।

$R$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

$\mathbf{N}$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট

$\mathbf{Z}$ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

$\mathbf{Q}$ সকল মূলদ সংখ্যার সেট নির্দেশ করে।

(ক) ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

সংজ্ঞা। সকল $a \in R$ এর জন্য

(১) $a^1 = a$

(২) $a^n = a.\ a.\ a.\ ..........\ a$, ($n$ সংখ্যক উৎপাদক), যেখানে $n \in N, n > 1$.

প্রতিজ্ঞা ১। $a \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$ হলে, $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n.a$

প্রমাণ : সংজ্ঞানুযায়ী $a^1 = a$ এবং $n \in N$ এর জন্য

$$a^{a+1} = \overbrace{\underbrace{a.a.a \qquad\qquad a.a.}_{n \text{ সংখ্যক}}}^{n+1 \text{ সংখ্যক}} = a^n.a$$

প্রতিজ্ঞা ২। $a \in R$ এবং $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ : যে কোন $m \in N$ নির্দিষ্ট করে এবং $n$ কে চলক ধরে খোলা বাক্য $a^m.a^n = a^{m+n}$ ....................(1) বিবেচনা করি।

(1) এ $n = 1$ বসিয়ে দেখা যায় যে,

বামপক্ষ $= a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}$ [প্রতিজ্ঞা ১] ডানপক্ষ $= a^{m+1}$

$\therefore\ n = 1$ এর জন্য (1) সত্য।

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (1) সত্য। অর্থাৎ $a^m.a^k = a^{m+k}$ ....................................................(2)

তাহলে, $a^m.a^{k+1} = a^m.(a^k.a)$ [প্রতিজ্ঞা ১]

$= (a^m.a^k).a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k}.a$ [ আরোহ-কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [প্রতিজ্ঞা ১]

অর্থাৎ, $n = k + 1$ এর জন্য (1) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

$\therefore$ যে কোন $m, n \in N$ এর জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$

মন্তব্য : এই প্রতিজ্ঞায় বর্ণিত $a^m.a^n = a^{m+n}$ সূত্রটিকে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা ৩। $a \in R, a \neq 0$ এবং, $m, n \in \mathbf{N}$ হলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m > n \text{ হয়} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } m < n \text{ হয়} \end{cases}$$

প্রমাণ : (১) মনে করি, $m > n$, তাহলে $m - n \in N$

$\therefore a^{m-n}.a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ [প্রতিজ্ঞা ২ ]

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

(২) মনে করি, $m < n$, তাহলে $n - m \in \mathbf{N}$

$\therefore a^{n-m}.a^m = a^{(n-m)+m} = a^n$ [প্রতিজ্ঞা ২]

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

প্রতিজ্ঞা ২ এর প্রমাণের মত গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রতিজ্ঞা ৩ প্রমাণ করা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৪। $a \in R$ এবং $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রতিজ্ঞা ৫। $a, b \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$

উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞা দ্বারা আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ ১। $(\frac{3}{4})^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}$; $2^5.2^3 = 2^{5+3} = 2^8$;

$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$; $\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2}$;

$(4^3)^6 = 4^{3\times6} = 4^{18}$; $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5.(b^3)^5 = a^{2\times5}.b^{3\times5} = a^{10}b^{15}$.

(খ) শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

সংজ্ঞা। $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ হলে,

(৩) $a^0 = 1$; (৪) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , যেখানে $n \in \mathbf{N}$.

মন্তব্য : সূচকের ধারণা সম্প্রসারণের সময় লক্ষ্য রাখা হয় যেন সূচকের মৌলিক সূত্র $a^m.a^n = a^{m+n}$ সকল ক্ষেত্রেই বৈধ থাকে। সূত্রটি যদি $m = 0$ এর জন্য সত্য হতে হয়, তবে $a^o.a^n = a^{o+n} = a^n$ অর্থাৎ $a^o = \frac{a^n}{a^n} = 1$ হতে হবে। একইভাবে, সূত্রটি যদি $m = -n$ $(n \in N)$ এর জন্য সত্য হতে হয়,

তবে $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ অর্থাৎ, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ হতে হবে। এদিকে লক্ষ্য রেখেই উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ২। $7^0 = 1, (-12)^0 = 1, 3^{-1} = \frac{1}{3}$,

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ , $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0\cdot1$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

উদাহরণ ৩। দেখাও যে, সকল $m, n \in N$ এর জন্য $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, যেখানে $a \neq 0$।

সমাধান : $m > n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [প্রতিজ্ঞা ৩]

$m < n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ [প্রতিজ্ঞা ৩]

$= a^{-(n-m)}$ [প্রতিজ্ঞা ৪]

$= a^{m-n}$

$m = n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0$ [ সংজ্ঞা ৩]

$= a^{m-m} = a^{m-n}$.

দ্রষ্টব্য। উপরে বর্ণিত সূচকের সংজ্ঞাগুলো থেকে যে কোনো $m \in \mathbf{Z}$ এর জন্য $a^m$ এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a \neq 0$. সূচক ধনাত্মক অথবা শূন্য অথবা ঋণাত্মক ধরে সাধারণভাবে সকল পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৬। $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$ হলে, (ক) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (খ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(গ) $(a^m)^n = a^{mn}$ (ঘ) $(ab)^n = a^nb^n$ (ঙ) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

এই প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্রবিশেষের আলোচনার জন্য উদাহরণ ও অনুশীলনী দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ ৪। $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে নিয়ে দেখাও যে,

$(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$.

সমাধান : (১) এখানে $(a^m)^n = a^{mn}$ .......(1) যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in N$ ও $n \in Z$.

প্রথমে মনে করি, $n > 0$, এক্ষেত্রে (1) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

(২) এখন মনে করি $n = 0$, এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 \;\therefore\; a^{mn} = a^0 = 1 \;\therefore\;$ (1)সত্য।

(৩) সবশেষে মনে করি $n < 0$ এবং $n = -k$, যেখানে $k \in \mathbf{N}$.

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \dfrac{1}{(a^m)^k} = \dfrac{1}{a^{mk}} = a^{-(mk)} = a^{m(-k)} = a^{mn}$.

## অনুশীলনী ৪.১

১। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a.b)^n = a^n.b^n$ যেখানে $a, b \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে,

$(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $a > 0$ এবং $n \in N$। অতঃপর $(ab)^n = a^n b^n$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে,

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ যেখানে, $a, b \in \mathbf{R}, b > 0$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

৪। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$. ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$. সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

যখন (i) $m > 0$ এবং $n < 0$; (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$.

৫। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $b \neq 0$. ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(ab)^n = a^n b^n$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, সকল $n \in \mathbf{Z}$ এর জন্য $(ab)^n = a^n b^n$

৬। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$ ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যখন (i) $m < 0$ এবং $n > 0$;

(ii) $m < 0$ এবং $n < 0$.

**(গ) n তম মূল ($n \in N$)**

সংজ্ঞা। $n \in \mathbf{N}, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, যদি এমন $x \in R$ থাকে যেন $x^n = a$ হয়, তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়। 2 তম মূলকে বর্গমূল এবং 3 তম মূলকে ঘনমূল বলা হয়।

উদাহরণ ৫। (i) 2 এবং $-2$ উভয়ই 16 এর 4 তম মূল, কারণ $(2)^4 = 16$ এবং $(-2)^4 = 16$

(ii) $-27$ এর ঘনমূল $-3$, কারণ $(-3)^3 = -27$.

(iii) 0 এর n তম মূল 0, কারণ সকল n এর জন্য $0^n = 0$।

(iv) $-9$ এর কোনো বর্গমূল নেই, কারণ যে কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অঋণাত্মক। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(ক) যদি $a > 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হয়, তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল আছে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় ($\sqrt[2]{a}$এর স্থলে$\sqrt{a}$ লেখা হয়) এবং একে a এর মুখ্য n তম মূল বলা হয়। n জোড় সংখ্যা হলে এরূপ a এর অপর একটি n তম মূল আছে এবং তা হল $-\sqrt[n]{a}$ .

(খ) যদি $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$, n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে a এর একটি মাত্র n তম মূল আছে যা ঋণাত্মক। এই মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। n জোড় হলে এবং a ঋণাত্মক হলে a এর কোন n তম মূল নেই।

(গ) 0 এর n তম মূল $\sqrt[n]{0} = 0$.

দ্রষ্টব্য। (১) $a > 0$ হলে, $\sqrt[n]{a} > 0$.

(২) $a < 0$ এবং n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} < 0$, (যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরম মান)

উদাহরণ ৬। $\sqrt{4} = 2, (\sqrt{4} \neq -2)$,

$$\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}\,,$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$$

প্রতিজ্ঞা ৭। $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$, n বিজোড় হলে দেখাও যে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

[এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, $|a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$ এবং $a \neq 0$ হলে, $|a| > 0$]

সমাধান : মনে করি, $\sqrt[n]{|a|} = x$

তাহলে, $x^n = |a|$ [মূলের সংজ্ঞা]

বা, $x^n = -a$ [$|a|$ এর সংজ্ঞা]

বা, $-x^n = a$

বা, $(-x)^n = a$ [$\because$ n বিজোড়] $\therefore \sqrt[n]{a} = -x$ [মূলের সংজ্ঞা]

সুতরাং, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ ; কেননা a-এর n-তম মূল অনন্য।

উদাহরণ : $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{27}$

প্রতিজ্ঞা ৮। $a > 0, m \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রমাণ : মনে করি $\sqrt[n]{a} = x$ এবং $\sqrt[n]{a^m} = y$. তাহলে, $x^n = a$ এবং $y^n = a^m$

$\therefore y^n = a^m = (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$

যেহেতু $y > 0, x^m > 0$, সুতরাং মুখ্য $n$ তম মূল বিবেচনা করে পাই, $y = x^m$

$\therefore \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ অর্থাৎ, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রতিজ্ঞা ৯। যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in \mathbf{Z}$ এবং $n, q \in \mathbf{N}, n > 1, q > 1,$

তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^p}$.

প্রমাণ : এখানে $qm = pn$; মনে করি, $\sqrt[n]{a^m} = x$ তাহলে, $x^n = a^m \therefore (x^n)^q = (a^m)^q$

$\therefore x^{qn} = a^{qm} = a^{pn}$ বা, $(x^q)^n = (a^p)^n$

$\therefore x^q = a^p$ [মুখ্য $n$ –তম মূল বিবেচনা করে] $\therefore x = \sqrt[q]{a^p}$ $\therefore \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত । যদি $a > 0$ এবং $n, k \in \mathbf{N}, n > 1$ হয়, তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

(ঘ) মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা। $a \in \mathbf{R}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে,

(৫) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং $n$ বিজোড়।

মন্তব্য ১। সূচক নিয়ম $(a^m)^n = a^{mn}$ [প্রতিজ্ঞা ৬ দ্রষ্টব্য] যদি সকল ক্ষেত্রে সত্য হতে হয়, তবে $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ হতে হবে অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর $n$ –তম মূল হতে হবে। এজন্য একাধিক মূলের ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থতা পরিহারের লক্ষ্যে উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

মন্তব্য ২। $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1, n$ বিজোড় হলে প্রতিজ্ঞা ৭ থেকে দেখা যায় যে,
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$ এরূপ ক্ষেত্রে এই সূত্রের সাহায্যেই $a^{\frac{1}{n}}$ এর মান নির্ণয় করা হয়।

মন্তব্য ৩। $a$ মূলদ সংখ্যা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ অমূলদ সংখ্যা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয় ।

সংজ্ঞা। $a > 0, m \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে,

(৬) $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

দ্রষ্টব্য ১। সংজ্ঞা (৫) ও (৬) এবং প্রতিজ্ঞা ৮ থেকে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, যেখানে $a > 0, m \in z$ এবং $n \in N, n > 1$.

সুতরাং $p \in \mathbf{Z}$ এবং $q \in \mathbf{N}, n > 1$ যদি এমন হয় যে, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়,

তবে প্রতিজ্ঞা ৯ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

দ্রষ্টব্য ২। পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক এবং মূলদ ভগ্নাংশ সূচকের সংজ্ঞা থেকে $a^r$ এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায় যেখানে $a > 0$ এবং $r \in \mathbf{Q}$. উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, $a > 0$ হলে, $r$ কে বিভিন্ন সমতুল্য ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হলেও $a^r$ এর মানের কোনো তারতম্য হয় না।

দ্রষ্টব্য ৩। প্রতিজ্ঞা ৬ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো সাধারণভাবে যে কোনো মূলদ সূচকের জন্যও সত্য হয় ।

প্রতিজ্ঞা ১০। $a > 0, b > 0$ এবং $r, s \in \mathbf{Q}$ হলে (ক) $a^r . a^s = a^{r+s}$ (খ) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (গ) $(a^r)^s = a^{rs}$ (ঘ) $(ab)^r = a^r b^r$ (ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

এই প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্র বিশেষের প্রমাণের জন্য উদাহরণ ও অনুশীলনী দ্রষ্টব্য । (ক) ও (ঘ) এর পুনঃপুন প্রয়োগের মাধ্যমে দেখা যায় যে,

অনুসিদ্ধান্ত । (১) $a > 0$ এবং $r_1, r_2, \ldots\ldots r_k \in \mathbf{Q}$ হলে $a^{r_1}.a^{r_2} \ldots\ldots a^{r_k} = a^{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}$

(২) $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots\ldots, a_n > 0$ এবং $r \in \mathbf{Q}$ হলে,

$$(a_1.a_2 \ldots\ldots a_n)^r = a_1^r.a_2^r \ldots\ldots a_n^r$$

উদাহরণ ৭। দেখাও যে,

$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ যেখানে, $a > 0; m, p \in \mathbf{Z}; n, q \in \mathbf{N}, n > 1, q > 1$.

সমাধান : $\frac{m}{n}$ ও $\frac{p}{q}$ কে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np}$ [সংজ্ঞা ৬]

$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np}$ [প্রতিজ্ঞা ৬ ] $= a^{\frac{mq+np}{nq}}$ [সংজ্ঞা ৬] $= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

৪.২। অমূলদ সূচক

$a > 0$ হলে অমূলদ সূচক x এর জন্যও $a^x$ বিবেচনা করা হয়। এ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা এই পুস্তকের আওতা বহির্ভূত। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(ক) অমূলদ সূচকের জন্য $a^x$ এর মান এমন ভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে x এর মূলদ আসন্ন মান p এর জন্য $a^p$ এর মান $a^x$ এর মানের আসন্ন হয়। উদাহরণস্বরূপ, $3^{\sqrt{5}}$ সংখ্যাটি বিবেচনা করি। আমরা জানি, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{5} = 2{\cdot}236067977........$ (এই মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে এবং দশমিক বিস্তার যে অনন্ত তা .......দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে)।$\sqrt{5}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$p_1 = 2{\cdot}23$ $\quad$ $p_2 = 2{\cdot}236$

$p_3 = 2{\cdot}2360$ $\quad$ $p_4 = 2{\cdot}236067$

$p_5 = 2{\cdot}2360679$ $\quad$ $p_6 = 2{\cdot}23606797$

বিবেচনা করে $3^{\sqrt{5}}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$q_1 = 3^{2{\cdot}23} = 11{\cdot}5872505$ ...............

$q_2 = 3^{2{\cdot}236} = 11{\cdot}6638822$ ..............

$q_3 = 3^{2{\cdot}23606} = 11{\cdot}6646510$ ..............

$q_4 = 3^{2{\cdot}236067} = 11{\cdot}6647407$ ..............

$q_5 = 3^{2{\cdot}2360679} = 11{\cdot}6647523$ ..............

$q_6 = 3^{2{\cdot}23606797} = 11{\cdot}6647532$ ..............

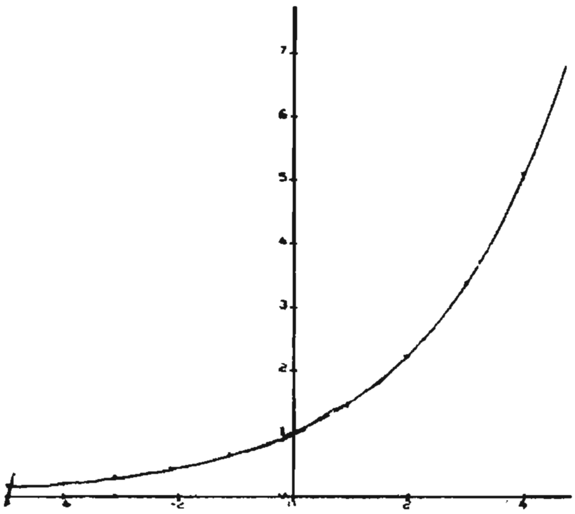
পাওয়া যায় (এই মানগুলোও ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে) বাস্তবিক পক্ষে,

$3^{\sqrt{5}} = 11{\cdot}6647533$ ...........

(খ) নির্দিষ্ট ধনাত্মক a এর জন্য x চলকের সুবিধাজনক কতকগুলো মূলদ মান নিয়ে $a^x$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করে $y = a^x$ সমীকরণের লেখ এঁকে লেখ থেকে দুইটি মূলদ সংখ্যার অন্তর্বর্তী সকল x এর জন্য $a^x$ এর মানের ধারণা পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, $y = (1{\cdot}5)^x$ সমীকরণের জন্য ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের ছকটি তৈরি করা যেতে পারে :

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1·50 | 2·25 | 3·38 | 5·06 | 7·59 | 0·67 | 0·44 | 0·30 | 0·20 |

এখন ছক কাগজে সুবিধাজনক একক নিয়ে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করে বিন্দুগুলো দিয়ে একটি স্বচ্ছন্দ রেখা এঁকে নিচের লেখচিত্রটি পাওয়া যাবে।



এই লেখচিত্র থেকে $y = (1{\cdot}5)^x$ এর আসন্ন মান পাওয়া যায়, যেখানে $-4 \leq x \leq 5$।

(গ) $a > 0$ হলে, সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a^x > 0$.

(ঘ) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে, প্রত্যেক $y > 0$ এর জন্য একটি অনন্য $x \in \mathbf{R}$ নির্দিষ্ট করা যায় যেন $a^x = y$ হয়।

(ঙ) প্রতিজ্ঞা ১০ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো মূলদ-অমূলদ সকল সূচকের জন্য অর্থাৎ, সকল $r, s \in R$ এর জন্য সত্য হয়।

(চ) যদি $x < y$ হয়, তবে $a^x < a^y$ যখন $a > 1$ এবং $a^x > a^y$ যখন $0 < a < 1$.

সকল $x$ এর জন্য $1^x = 1$.

(ছ) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে, $a^x = a^y$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = y$ হয়।

(জ) $a > 0, b > 0$ এবং $x \neq 0$ হলে, $a^x = b^x$ হবে যদি ও কেবল যদি $a = b$ হয়।

কয়েকটি উদাহরণ

[এই উদাহরণগুলোতে উল্লিখিত সকল ঘাতের ভিত্তি ধনাত্মক ও ১ থেকে ভিন্ন ধর্তব্য]।

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$.

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(p^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(p^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(p^{c-a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} = p^0 = 1 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ৯। সরল কর :

$$\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} + \frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}} + \frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$$

সমাধান : এখানে $\dfrac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}(1+a^{y-z}+a^{y-x})} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}$

একই ভাবে, $\dfrac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}}$ এবং $\dfrac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}} = 1$

উদাহরণ ১০। যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, হবে দেখাও যে, $x+y+z=0$.

সমাধান : ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$. তাহলে পাই, $a = k^x, b = k^y, c = k^z$.

$\therefore abc = k^x k^y k^z = k^{x+y+z}$. দেওয়া আছে, $abc = 1$ $\therefore$ $k^{x+y+z} = k^0$ $\therefore$ $k^{x+y+z} = k^0$

$\therefore$ $x+y+z=0$.

উদাহরণ ১১। যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^b = b^a$, $\therefore$ $a^{\frac{b}{b}} = b^{\frac{a}{b}}$ বা $a = b^{\frac{a}{b}}$

এখন $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = a^{\frac{a}{b}-1}$

উদাহরণ ১২। যদি $xyz \neq 0$, $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b^y$, $\therefore$ $a = b^{\frac{x}{y}}$ আবার $c^z = b^y$ $\therefore$ $c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}} b^{\frac{z}{x}} = b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$ $\therefore$ $\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{z} = 2$ বা, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$.

উদাহরণ ১৩। যদি $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q} = 1$.

সমাধান : বাম পক্ষ $= a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r}\,(xy^{q-1})^{r-p}\,(xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r}\,y^{(p-1)(q-r)}\,x^{r-p}\,y^{(q-1)(r-p)}\,x^{p-q}\,y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}\,y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$= x^0\,y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0\,y^0 = 1 \times 1 = 1 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ১৪ । যদি $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ $\therefore$ $a - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-2)^3 = (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^2 + 2 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$

$(a-2)^3 = 6 + 6(a-2)$ [$\because$ $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ এবং $2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} = a - 2$]

বা, $a^3 - 3a^2.2 + 3a.2^2 - 2^3 = 6 + 6(a-2)$ বা, $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$.

## অনুশীলনী ৪.২

[নিচের প্রশ্নগুলোতে সকল ঘাতের ভিত্তি ধনাত্মক ও 1 থেকে ভিন্ন ধর্তব্য]

১। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

২। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m,n \in$ N.

৩। প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$.

৪। দেখাও যে,

(ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = (a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1)$

৫। সরল কর :

(ক) $\left\{(x^{\frac{1}{a}})^{\frac{a^2 - b^2}{a - b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

(খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

(গ) $\dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

(ঘ) $\dfrac{1}{1 + a^{-m}b^{n} + a^{-m}c^{p}} + \dfrac{1}{1 + b^{-n}c^{p} + b^{-n}a^{m}} + \dfrac{1}{1 + c^{-p}a^{m} + c^{-p}b^{n}}$

(ঙ) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$

(চ) $\dfrac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}}$

৬। দেখাও যে,

(ক) যদি $x = a^{q+r} b^p, y = a^{r+p} b^q, z = a^{p+q} b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}. y^{r-p}. z^{p-q} = 1$

(খ) যদি $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$ হয়, তবে $pqr = 1$.

(গ) যদি $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y q^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$

৭। (ক) যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়,

তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

(খ) যদি $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$.

(গ) যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$.

(ঘ) যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$.

(ঙ) যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{-1}{3}}$

(চ) যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$.

## ৪.৩। লগারিদম

সংজ্ঞা। মনে করি, $a > 0$ এবং $a \neq 1$ এক্ষেত্রে যদি $a^x = y$ হয়, তবে $x$ কে বলা হয় $y$ এর $a$ ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ, $x = \log_a y$।

মন্তব্য। উপরের সংজ্ঞায় $a > 0$ এবং $a \neq 1$ ধরা হয়েছে। লগারিদমের বর্ণনায় সবসময় 1 থেকে ভিন্ন কোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে ভিত্তি ধরা হবে। সেজন্য ভিত্তি a সম্পর্কে কোনো কিছু উল্লেখ না থাকলে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ বিবেচ্য।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(১) $a > 0$ হওয়ায় সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a^x > 0$। সুতরাং $y \leq 0$ হলে y এর a ভিত্তিক কোনো লগারিদম নেই। অর্থাৎ, শুধু ধনাত্মক রাশিরই লগারিদম বিবেচ্য।

(২) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হওয়ায় প্রত্যেক ধনাত্মক y এর জন্য একটি অনন্য $x \in \mathbf{R}$ আছে যেন $a^x = y$ হয়। ফলে, $y > 0$ হলে y এর একটি অনন্য a ভিত্তিক লগারিদম আছে।

$a > 0$ ও $a \neq 1$ এবং $y > 0$ হলে y এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a y$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং,

(ক) $\log_a y = x$ যদি ও কেবল যদি $a^x = y$ হয়।

(ক) থেকে দেখা যায় যে,

(খ) $\log_a(a^x) = x$

(গ) $a^{\log_a y} = y$.

উদাহরণ ১।

(১) $2^3 = 8$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_2 8 = 3$

(২) $3^4 = 81$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_3 81 = 4$

(৩) $4^2 = 16$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_4 16 = 2$

(৪) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ , সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$

(৫) $(64)^{4/3} = 256$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{64} 256 = \frac{4}{3}$

(৬) $10^3 = 1000$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{10} 1000 = 3$

(৭) $10^{-2} = 0{\cdot}01$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{10} 0{\cdot}01 = -2$

(৮) $7^{\log_7 9} = 9$, এবং $18 = \log_2 2^{18}$ (সূত্র (২) এবং সূত্র (৩) অনুসারে)।

প্রতিজ্ঞা ১। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(ঘ) $\log_a 1 = 0$ এবং (ঙ) $\log_a a = 1$

প্রমাণ : (ঘ) যদি $a \neq 0$ হয়, তবে $a^0 = 1$ .

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $\log_a 1 = 0$.

(ঙ) যদি $a \neq 1$ হয়, তবে $a^1 = a$. সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $\log_a a = 1$.

উদাহরণ ২। $\log_5 5 = 1$. যেহেতু $5^1 = 5$ $\log_{1/2}(\frac{1}{2}) = 1$ যেহেতু $(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

প্রতিজ্ঞা ২। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(চ) $\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$ যেখানে $P > 0$ এবং $Q > 0$.

প্রমাণ : ধরি, $x = \log_a P$, $y = \log_a Q$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $a^x = P$, $a^y = Q$. এখন $PQ = a^x a^y = a^{x+y}$

অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\log_a PQ = x + y = \log_a P + \log_a Q$.

অনুসিদ্ধান্ত । $\log_a (ABC\ldots\ldots\ldots K)$

$$= \log_a A + \log_a B + \log_a C + \ldots\ldots\ldots\ldots + \log_a K$$

যেখানে A, B, .................. K প্রত্যেকে ধনাত্মক।

উদাহরণ ৩। $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 (5.7.3) = \log_2 105$.

মন্তব্য। সাধারণভাবে,

$\log_a(P+Q) \neq \log_a P + \log_a Q$; $\log_a(PQ) \neq \log_a P . \log_a Q$

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(ছ) $\log_a(\frac{P}{Q}) = \log_a P - \log_a Q$

যেখানে $P > 0$ এবং $Q > 0$.

প্রমাণ : ধরি $x = \log_a p$, $y = \log_a Q$ $\therefore$ $a^x = P$, $a^y = Q$. এখন $\frac{P}{Q} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \log_a(\frac{P}{Q}) = x - y = \log_a P - \log_a Q$.

উদাহরণ ৪। $\log_3 20 - \log_3 5 = \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4$

মন্তব্য। সাধারণভাবে, $\log_a(P-Q) \neq \log_a P - \log_a Q$ $\therefore \log_a(\frac{P}{Q}) \neq \frac{\log_a P}{\log_a Q}$

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(জ) $\log_a(P^r) = r\log_a P$ যেখানে $P > 0$ এবং $r \in \mathbf{R}$.

প্রমাণ : ধরি $x = \log_a P$ $\therefore$ $a^x = P$ বা, $(a^x)^r = p^r$ বা, $a^{rx} = p^r$

$\therefore\ \log_a (pr) = rx = r \log_a P$

উদাহরণ ৫। $\log_5{}^{64} = \log_5 2^6 = 6 \log_5 2.$

$\log_7 \sqrt[3]{64} = \log_7 64^{\frac{1}{3}}$ ; বা, $\frac{1}{3} \log_7 64 = \frac{1}{3} \log_7 4^3 = \frac{3}{3} \log_7 4 = \log_7 4.$

প্রতিজ্ঞা ৫। যদি $a, b, P > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে

(ঝ) $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

প্রমাণ : ধরি $\log_b P = x, \log_a b = y \ \therefore\ b^x = P, a^y = b \ \therefore\ P = (a^y)^x = a^{xy}$

$\therefore\ \log_a P = xy = \log_b P \times \log_a b$

অনুসিদ্ধান্ত : (ঞ) $\log_a b \times \log_b a = \left| 1 \right|$ হয় তবে, $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$

প্রমাণ : (ঞ) প্রতিজ্ঞা ৫ থেকে $P = a$ ধরে পাই,

$\log_a a = \log_b a \times \log_a b \ \therefore\ \log_a b \times \log_b a = \log_a a = 1$ [প্রতিজ্ঞা ১ প্রয়োগ করে]।

উপরের (ঞ) থেকে, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\therefore$ প্রতিজ্ঞা ৫ থেকে পাই, $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$

উদাহরণ ৬। $\log_2 3 \log_3 2 = 1$ এবং $\log_5 12 = \dfrac{\log_7 12}{\log_7 5}$ [উপরের অনুসিদ্ধান্ত থেকে]

কতিপয় উদাহরণ :

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1.$

সমাধান : ধরি, $P = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে $\log_k P = (\log_k b - \log_k c) \log_k a + (\log_k c - \log_k a) \log_k b + (\log_k a - \log_k b) \log_k c.$

$= 0$ [সরল করে] $\therefore\ P = k^0 = 1.$

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

প্রমাণ : ধরি $p = \log^a y$, $q = \log_a x$ সুতরাং $a^p = y, a^q = x$

$\therefore (a^p)^q = y^q$ বা, $y^q = a^{pq}$

এবং $(a^q)^p = x^p$ বা, $x^p = a^{pq}$

$\therefore x^p = y^q$, বা, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উদাহরণ ৯। দেখাও যে, $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b = \log_a b$.

সমাধান : বামপক্ষ $= (\log_p q \times \log_a p) \times (\log_r b \times \log_q r)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ১০। দেখাও যে, $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

সমাধান : ধরি, $\log_a (abc) = x$, $\log_b (abc) = y$, $\log_c (abc) = z$.

সুতরাং, $a^x = abc$, $b^y = abc$, $c^z = abc$ $\therefore$ $a = (abc)^{1/x}$, $b = (abc)^{1/y}$, $c = (abc)^{1/z}$

এখন $(abc)^1 = abc = (abc)^{1/x} (abc)^{1/y} (abc)^{1/z} = (abc)^{1/x + 1/y + 1/z}$ $\therefore$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1.$

অর্থাৎ, $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

উদাহরণ ১১। যদি $p = \log_a (bc)$, $q = \log_b (ca)$, $r = \log_c (ab)$ হয়,

তবে দেখাও যে, $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1} = 1.$

সমাধান : $1 + p = \log_a a + \log_a (bc) = \log_a (abc)$.

একইভাবে $1 + q = \log_b (abc)$, $1 + r = \log_c (abc)$.

কিন্তু উদাহরণ (১০) এ আমরা প্রমাণ করেছি $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

$\therefore \quad \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1} = 1.$

উদাহরণ ১২। যদি $\dfrac{\log a}{y-z} + \dfrac{\log b}{z-x} + \dfrac{\log c}{x-y}$ হয়, হবে দেখাও যে $a^x b^y c^z = 1$.

সমাধান : ধরি, $\dfrac{\log a}{y-z} + \dfrac{\log b}{z-x} + \dfrac{\log c}{x-y} = k$

তাহলে $\log a = k(y - z)$, $\log b = k(z - x)$, $\log c = k(x - y)$.

$\therefore x \log a + y \log b + z \log c = k(xy - xz + yz - xy + xz - yz) = 0.$

বা, $\log a^x b^y c^z = \log 1$ [$\therefore \log 1 = 0$] $\therefore a^x b^y c^z = 1.$

৪। সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণত 10 ভিত্তিক লগারিদম ব্যবহার করা হয়। অন্যদিকে তত্ত্বীয় গণিতের বিভিন্ন শাখায় স্বাভাবিকভাবেই e– ভিত্তিক লগারিদম বিবেচিত হয়, যেখানে

$e = 2{\cdot}71828182845904.....$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সংজ্ঞা। 10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম (common logarithm) এবং e ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক লগারিদম (natural logarithm) বলা হয়।

সাধারণ লগারিদমের প্রবর্তন করেন গণিতবিদ হেনরি ব্রিগ্‌স্‌ (১৫৬১–১৬৩১)। সেজন্য সাধারণ লগারিদমকে অনেক সময় ব্রিগ্‌সীয়ান লগারিদম বলা হয়।

স্বাভাবিক লগারিদমের প্রবর্তক গণিতবিদ জন নেপিয়ার (১৫৫০–১৬১৭)। সেজন্য স্বাভাবিক লগারিদমকে নেপিরিয়ান লগারিদমও বলা হয়।

সংজ্ঞা। $y > O$ হলে $y$ এর সাধারণ লগারিদম $x = \log_{10} y$ যেখানে $10^x = y$ এবং $y$ এর স্বাভাবিক লগারিদম $x = \log_e y$ যেখানে $e^x = y$।

মন্তব্য ১। সাধারণ লগারিদম $\log_{10} y$ কে সচরাচর ভিত্তি 10 উহ্য রেখে $\log y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। ইদানীং $\log_{10} y$ বোঝাতে $\log y$ প্রতীকও ব্যবহৃত হয়।

মন্তব্য ২। স্বাভাবিক লগারিদম $\log_e y$ বোঝাতে $\ln y$ প্রতীকের ব্যবহার এখন সর্বজন স্বীকৃত।

মন্তব্য ৩। পূর্বেই উল্লেখ করা হয়েছে যে স্বাভাবিক লগারিদমের ভিত্তি e একটি অমূলদ সংখ্যা। বিভিন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত e এর আসন্ন মান।

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

ধারার প্রথম থেকে বিভিন্ন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করে পাওয়া যায়। যেমন,

প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি $= 2{\cdot}7083333.........$

প্রথম আটটি পদের সমষ্টি $= 2{\cdot}7182539.........$

প্রথম বারটি পদের সমষ্টি $= 2{\cdot}7182818.........$

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করেও e এর আসন্ন মান $2{\cdot}7182818$ পাওয়া যায়।

সাধারণ লগারিদম

সাধারণ লগারিদম নির্ণয় করা সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে।

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ **(Scientific notation)**

মনে করি, $a$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। যদি $a = m \times 10^n$ লেখা হয় যেখানে $1 \leq m < 10$ এবং $n$ একটি পূর্ণসংখ্যা, তবে $a$ এর বৈজ্ঞানিক রূপ পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১। কয়েকটি সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ নিম্নে দেখানো হল :

$$752310000 = 7{\cdot}5231 \times 10^8$$
$$0{\cdot}0346 = 3{\cdot}46 \times 10^{-2}$$
$$3215 = 3.215 \times 10^3$$
$$0{\cdot}0008932 = 8{\cdot}.932 \times 10^{-4}$$

প্রতিজ্ঞা। যদি $a > 0$ এবং $a = m\ 10^n$ হয়, তবে $\log a = n + \log m$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a = m \times 10^n$

$$\therefore \log a = \log (m \times 10^n) = \log m + \log 10^n$$
$$= \log m + n\ [\because \log 10 = \log_{10} 10 = 1]$$

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক এবং অংশক

প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যার সাধারণ লগারিদমের দুইটি অংশ আছে : একটি পূর্ণক (characteristic) এবং অপরটি অংশক (mantissa)। $a = m \times 10^n$ হলে উপরের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী $\log a = \log m + n$ হয়।

$n$ কে $\log a$ এর পূর্ণক এবং $\log m$ কে $\log a$ এর অংশক বলে। $\log m$ এর মান লগ তালিকা থেকে বের করতে হয়।

উদাহরণ ২। $\log 125$ এবং $\log 0{\cdot}00293$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $125 = 1{\cdot}25 \times 10^2$.

$\therefore \log 125$ এর পূর্ণক $= 2$ এবং অংশক $\log 1{\cdot}25 = 0{\cdot}09691$। (পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট লগ তালিকা থেকে)।

সুতরাং $\log 125 = 2 + 0{\cdot}09691 = 2{\cdot}09691$. আবার $0{\cdot}00293 = 2{\cdot}93 \times 10^{-3}$

সুতরাং $\log 0{\cdot}00293$ এর পূর্ণক $= -3$ এবং অংশক $\log 2{\cdot}93 = 0{\cdot}46687$ (লগ তালিকা থেকে)।

সুতরাং $\log 0{\cdot}00293 = -3 + 0{\cdot}46687 = 7{\cdot}46687 - 10$

প্রতিলগ **(Antilogarithm)**

যদি $\log a = n$ হয়, তবে $a$ কে $n$ এর প্রতিলগ বলা হয়। অর্থাৎ, $\log a = n$ হলে $a = \text{antilog } n$.

উদাহরণ ৫। $\text{antilog } 2{\cdot}87679 = 753$, $\text{antilog } (9{\cdot}82672 - 10) = 0{\cdot}671$ এবং $\text{antilog } (6{\cdot}74429 - 10) = 0{\cdot}000555$.

দ্রষ্টব্য। বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\log a$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় (মাধ্যমিক ব্যবহারিক গণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য।)

স্বাভাবিক লগারিদম

স্বাভাবিক লগারিদমের বিস্তারিত আলোচনা এই পুস্তকের আওতা বহির্ভূত। আমরা শুধু এটুকু লক্ষ করি যে,

$\log a = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} e}$ [(ট) থেকে] অর্থাৎ, $\ln a = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} e}$

এখন $\dfrac{1}{\log e}$ এর আসন্ন মান $2{\cdot}302585$ নির্ণয় করে উপরের সূত্র থেকে দেখা যায় যে,

$\ln a \approx 2{\cdot}302585 \times \log a$

$a$ এর সাধারণ লগ নির্ণয় করে এই সূত্রের সাহায্যে $a$ এর স্বাভাবিক লগ নির্ণয় করা যায়। তবে সরাসরি ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\ln a$ এর মান নির্ণয় করাই সুবিধাজনক (মাধ্যমিক ব্যবহারিক গণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)।

## অনুশীলনী ৪.৩

১। দেখাও যে :

(ক) $\log_k\left(\dfrac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\dfrac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\dfrac{c^n}{a^n}\right) = 0$

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\dfrac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\dfrac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\dfrac{c}{a}\right) = 0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$ (ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b.$

২। (ক) যদি $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1.$

(খ) যদি $\dfrac{\log_k a}{y-z} = \dfrac{\log_k b}{z-x} = \dfrac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1.$

(২) $a^{y^2+yz+z^2}.\, b^{z^2+zx+x^2}.\, z^{x^2+xy+y^2} = 1$

(গ) যদি $\dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ঘ) দেখাও যে, $\log_k \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2\log_k (x - \sqrt{x^2 - 1})$

(ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x \log_k(b/a) = \log_k a$.

(চ) যদি $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$, $xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(b - c) \log_k p + (c - a) \log_k q + (a - b) \log_k r = 0$$

(ছ) যদি $\dfrac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \dfrac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \dfrac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও $a^a = b^b = c^c$.

(জ) যদি $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \dfrac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \dfrac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$.

৩। লগসারণী (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে

(ক) $P = (0{\cdot}087721)^4$ (খ) $P = \sqrt[3]{30.00618}$ (গ) $P = \dfrac{3407 \times 24.32}{54.74 \times 1.75}$

(ঘ) $P = 2\pi \sqrt{\dfrac{1}{g}}$ যেখানে $\pi \approx 3{\cdot}1416$, $g = 981$ এবং $1 = 25{\cdot}5$

(ঙ) $P = 10000 \times e^{005t}$, যেখানে $e \approx 2{\cdot}718$ এবং $t = 13{\cdot}86$

৪। $\ln P \approx 2{\cdot}3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে $\ln P$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর

যখন (ক) $P = 10000$ (খ) $P = {\cdot}001e^2$ (গ) $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

# বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

## বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। $\left\{ \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}} \right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরল মান নিচের কোনটি ?

ক. 0 খ. 1
গ. a ঘ. x

২। যদি a, b, p > 0 এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়

i. $\log_a p = \log_b p \times \log_a b$

ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_{\sqrt{b}} b \times \log_c \sqrt{c}$ এর মান 2

iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii
খ. ii ও iii
গ. i ও iii
ঘ. i, ii ও iii

$x, y, z \neq 0$, এবং $a^x = b^y = c^z$ হলে, ৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। কোনটি সঠিক ?

ক. $a = b^{\frac{y}{z}}$ খ. $a = c^{\frac{z}{y}}$
গ. $a = c^{\frac{z}{x}}$ ঘ. $a \neq \frac{b^2}{c}$

৪। নিচের কোনটি ac এর সমান।

ক. $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}}$ খ. $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{z}{y}}$
গ. $b^{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}$ ঘ. $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

৫। $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ খ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$
গ. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ ঘ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$

# সৃজনশীল প্রশ্নাবলী
## (তৃতীয় ও চতুর্থ অধ্যায়)

**সৃজনশীল প্রশ্ন**

১। $x = \log_a y$ যেখানে $a > 0$, $a \neq 1$

ক. $\left\{(2^{\frac{1}{x}})^{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\right\}^{\frac{x}{x-y}}$ এর মান কত?

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে, দেখাও যে, $2y^3 - 6y - 5 = 0$

গ. x এর কোন মানের জন্য $\dfrac{\log_{10}(1+x)}{\log_{10}x} = 2$

২। $p, q, r \in R$ এবং $a, b, c \in N$

ক. R এবং N কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. যদি $a < b$ হয় তবে N এর মৌলিক স্বীকার্য ব্যাবহার করে দেখাও যে, $(a + c) < (b + c)$

গ. দেখাও যে, $pqr = 1$ [যখন $a^p = b$, $b^q = c$ এবং $c^r = a$]

এবং $p^{\frac{1}{x}} = q^{\frac{1}{y}} = r^{\frac{1}{z}}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $(x + y + z) = 0$

৩। $a, b, c \in R$; যেখানে $b = (1+3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}})$ এবং $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b}$

ক. দেখাও যে, $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

খ. দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

গ. $a^a b^b c^c$ এর মান বের কর।

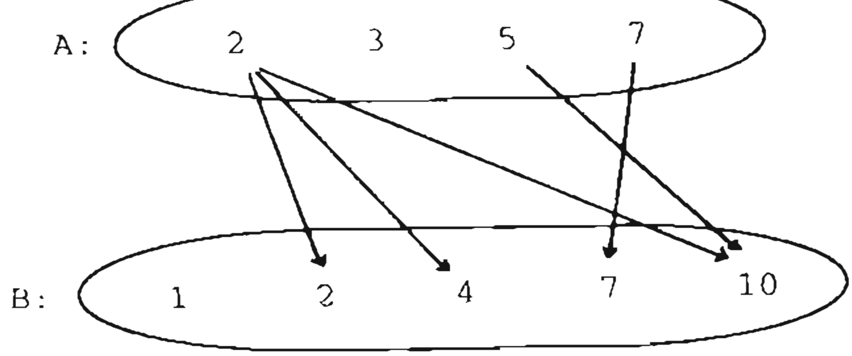
পঞ্চম অধ্যায়

# অন্বয় ও ফাংশন

## ৫.১। অন্বয়

উদাহরণ ১। মনে করি, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{1, 2, 4, 7, 10\}$

A এর যে যে সদস্য দ্বারা B এর যে যে সদস্য বিভাজ্য হয় তাদের অন্বিত করে নিচের চিত্রে দেখানো হল :




এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট $D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (5, 10), (7, 7)\}$ দ্বারা এই বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ A এর সদস্য ও দ্বিতীয় পদ B এর সদস্য যেখানে প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য। অর্থাৎ, $D \subset A \times B$ এবং $D = \{(x,y) :$ $x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$। এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

উদাহরণ ২। বাস্তব সংখ্যা ক্রমজোড়ের সেট $L = \{(x, y) ঃ x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y\}$ বিবেচনা করি। লক্ষ করি যে, দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b র জন্য $a < b$ যদি ও কেবল যদি $(a, b) \in \mathbf{L}$ হয়। সুতরাং L সেট দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ছোট বড় সম্পর্ক বর্ণিত হয়।

সংজ্ঞা। A ও B সেট হলে $A \times B$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A থেকে B এ একটি অন্বয় (relation) বলা হয়।

সংজ্ঞা। A একটি সেট হলে $A \times A$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A –এ একটি অন্বয় বলা হয়।

উদাহরণ ১ এ বর্ণিত D সেটটি উক্ত উদাহরণে উল্লিখিত A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়। উদাহরণ ২ এ বর্ণিত L সেটটি বাস্তব সংখ্যা সেট Rএ একটি অন্বয়।

মন্তব্য । প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।

সংজ্ঞা। মনে করি, A সেট থেকে B সেটে S একটি অন্বয়, অর্থাৎ, $S \subset A \times B$. S এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে S এর ডোমেন (domain) এবং দ্বিতীয় উপাদনসমূহের সেটকে S এর রেঞ্জ (range) বলা হয়। S এর ডোমেনকে ডোম S এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ S লিখে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য । A সেট থেকে B সেটে কোন অন্বয় S এর ডোম $S \subset A$, রেঞ্জ $S \subset B$ এবং

ডোম $S = \{x \in A$ ঃ কোনো $y \in B$ এর জন্য $(x, y) \in S\}$, রেঞ্জ $S = \{y \in B$ ঃ কোনো $x \in A$ এর জন্য (x,

$y) \in S\}$.

উদাহরণ ৩। উদাহরণ ১ এ বর্ণিত

অন্বয় $D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (5, 10), (7, 7)\}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $D$ এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\{2, 5, 7\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{2, 4, 7, 10\}$, $\therefore$ ডোম $D = \{2, 5, 7\}$ এবং রেঞ্জ $D = \{2, 4, 7, 10\}$

উদাহরণ ৪। যদি $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ হয়, তবে

$A$ সেটে অন্বয় $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ কে তালিকা প্রকাশ পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং $S$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ এর মান নির্ণয় করি :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |

যেহেতু $4 \in A$ সেহেতু $(-2, 4) \notin S$ , $(2, 4) \notin S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\} = \{ (-1, 1), (0, 0) , (1, 1)\}$

সুতরাং $S$ এর ডোমেন, ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$এবং $S$ এর রেঞ্জ, রেঞ্জ $S=\{0, 1\}$

উদাহরণ ৫।

$L = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y \}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x \in$ ডোম $L$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbf{R}$ এবং কোনো $y \in \mathbf{R}$ এর জন্য $x < y$.

যেহেতু $x \in R$ হলে $x + 1 \in \mathbf{R}$ এবং $x < x + 1$ , সেহেতু প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা $x \in$ ডোম $L$.

$\therefore$ ডোম $L = \mathbf{R}$

আবার, $y \in$ রেঞ্জ $L$ যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbf{R}$ এবং কোনো $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $x < y$. যেহেতু $y \in \mathbf{R}$ হলে $y - 1 \in \mathbf{R}$ এবং $y - 1 < y$ , সেহেতু বাস্তব সংখ্যা $y \in$ রেঞ্জ $L$ $\therefore$ রেঞ্জ $L = \mathbf{R}$

দ্রষ্টব্য ১। উদাহরণ ৪ এর অন্বয়টি "$x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2$" খোলাবাক্য এবং উদাহরণ ৫ এর অন্বয়টি "$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y$" খোলাবাক্য দ্বারা বর্ণিত হয়েছে। এরূপ খোলাবাক্যের দ্বারা অন্বয়ের বর্ণনায় দুইটি চলক $x$ ও $y$ থাকে। যে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান দ্বারা $x$ এবং দ্বিতীয় উপাদান দ্বারা $y$ প্রতিস্থাপিত হলে বাক্যটি একটি সত্য উক্তিতে পরিণত হয়, সেই ক্রমজোড়গুলোই উক্ত অন্বয়ের সদস্য হয়।

দ্রষ্টব্য ২। সাধারণত $\mathbf{R}$ কে সার্বিক সেট ধরে $\mathbf{R}$ এ কোনো অন্বয়ের বর্ণনায় $x \in \mathbf{R}$ এবং $y \in \mathbf{R}$ শর্ত অনুল্লেখ রাখা হয়। এ প্রসঙ্গে প্রচলিত রীতি এই যে, অন্যভাবে সীমিত করা না হলে $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এর যে সকল ক্রমজোড় প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে তারাই এরূপ অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ৬। $\mathbf{R}$ এ $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x} \}$ অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x, y) \in S$ হলে $y = \sqrt{x}$, শর্তানুযায়ী $x \geq 0$ হতে হবে এবং তখন $y \geq 0$ হবে। কেননা $\sqrt{x}$ দ্বারা $x$ এর বর্গমূল বোঝায়। অর্থাৎ, $S \subseteq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ যেখানে $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$

এখন $x \in \mathbf{R}_+$ অর্থাৎ, $x \geq 0$ হলে $\sqrt{x} \in \mathbf{R}_+$ এবং $(x, \sqrt{x}) \in S$। সুতরাং ডোম $S = \mathbf{R}_+$

আবার $y \in \mathbf{R}_+$ অর্থাৎ, $y \geq 0$ হলে $y^2 \in \mathbf{R}_+$, $\sqrt{y^2} = y$ এবং $(y^2, y) \in S$ । সুতরাং রেঞ্জ $S = \mathbf{R}_+$

মন্তব্য। $\mathbf{R}_+$ দ্বারা সবসময় সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ নির্দেশ করব।

## ৫.২। বিপরীত অন্বয়

$(a, b)$ ক্রমজোড়ের প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদানের স্থান পরিবর্তন করা হলে $(b, a)$ ক্রমজোড় পাওয়া যায়। কোনো অন্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদানের স্থান পরিবর্তন করা হলে আর একটি অন্বয় পাওয়া যায়। এই শেষোক্ত অন্বয়কে প্রথমোক্ত অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় বলা হয়।

সংজ্ঞা। $S$ কোনো অন্বয় হলে $S$ এর বিপরীত অন্বয় হচ্ছে $S^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in S\}$

মন্তব্য ১। $S$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়কে $S^{-1}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। $S$ যদি $A$ সেট থেকে $B$ সেটে কোনো অন্বয় হয়, তবে $S^{-1}$ হবে $B$ সেট থেকে $A$ সেটে একটি অন্বয়। $A$ সেটে কোনো অন্বয় $S$ এর বিপরীত অন্বয়ও $A$ সেটে একটি অন্বয়।

মন্তব্য ২। $S$ অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে $A$ ও $B$ হলে, বিপরীত অন্বয় $S^{-1}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে $B$ ও $A$ হবে, অর্থাৎ, ডোম $S^{-1}$ = রেঞ্জ $S$ এবং রেঞ্জ $S^{-1}$= ডোম $S$.

মন্তব্য ৩। $S$ কোন অন্বয় হলে $S^{-1}$ এর বিপরীত অন্বয় $S$ নিজেই। অর্থাৎ, $(S^{-1})^{-1} = S$

উদাহরণ ১। $S = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় $S^{-1} = \{(2, 1), (4 ,2), (6, 3), (8, 4)\}$.

এখানে ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$= রেঞ্জ $S^{-1}$এবং রেঞ্জ $S = \{2, 4, 6, 8\}$= ডোম $S^{-1}$

উদাহরণ ২। $\mathbf{R}$ সেটে $S = \{(x, y) : y^2 = x\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : $S$ এর বর্ণনায় $x$ স্থলে $y$ এবং $y$ স্থলে $x$ লিখে পাই, $S = \{(y, x) : x^2 = y\}$

সুতরাং $S^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in S\} = \{(x, y) : x^2 = y\} = \{(x, y) : y = x^2\}$.

## ৫.৩ ফাংশন

ফাংশন বিশেষ ধরনের অন্বয়।

সংজ্ঞা। যদি কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা। যদি $F$ একটি ফাংশন হয় এবং ডোম $F = A$ ও রেঞ্জ $F \subset B$ হয়, তবে $F$ কে $A$ থেকে $B$ এ বর্ণিত ফাংশন বলা হয় এবং $F : A \rightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য। $F : A \rightarrow B$ লিখলে বুঝতে হবে যে $F$ একটি ফাংশন যার ডোমেন $A$ এবং যার রেঞ্জ $B$ এর উপসেট।

উদাহরণ ১। $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি একটি ফাংশন। এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন।

উদাহরণ ২। $\mathbf{R}$ সেটে $S = \{(x, y) : y^2 = x\}$ অন্বয়টি ফাংশন নয়। এখানে ডোম $S = \mathbf{R}_+$ এবং

রেঞ্জ $S = \mathbf{R}$ (পূর্ব অনুচ্ছেদের উদাহরণ ২ দ্রষ্টব্য)

এখন $x = 1$ নিলে $y^2 = x$ শর্তানুযায়ী $y^2 = 1$ বা, $y = \pm 1$ হয়।

অর্থাৎ, $(1, 1) \in S$ এবং $(1, -1) \in S$, সুতরাং, $S$ ফাংশন নয়।

দ্রষ্টব্য ১। প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়। প্রত্যেক অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে। ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ হবে অন্বয় এর ডোমেন ও রেঞ্জ।

দ্রষ্টব্য ২। ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, কোনো অন্বয় $F$ ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $(x, y) \in F$ এবং $(x, y') \in F$ হলে $y = y'$ হয়। সুতরাং $F$ ফাংশন হলে $F$ এর ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য $x$ এর সঙ্গে $F$ এর রেঞ্জের একটি অনন্য সদস্য $y$ অন্বিত থাকে যেন $(x, y) \in F$ হয়।

সংজ্ঞা। যদি $F$ ফাংশন হয় এবং $(x, y) \in F$ হয় তবে $y$ কে $F$ এর অধীনে $x$ এর ছবি (image) বলা হয় এবং $y = F(x)$ লেখা হয়।

উদাহরণ ৩। উদাহরণ ১ এ বর্ণিত ফাংশনের ক্ষেত্রে,

$F(-2) = 4, F(-1) = 1, F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 4.$

এই ফাংশনের ডোমেন $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $B = \{0, 1, 4\}$

$A$ এর বিভিন্ন সদস্যের ছবি লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, এখানে $x \in A$ এর জন্য $F(x) = x^2$. এ ফাংশনটিকে $F : A \to B, F(x) = x^2$ লিখে প্রকাশ করা যায়।

মন্তব্য। কোনো ফাংশন $F$ এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য $x$ এর অনন্য ছবি $F(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ডোমেন হিসেবে $\mathbf{R}$ এর ঐ উপসেটকে গ্রহণ করা হয় যার প্রত্যেক সদস্য $x$ এর জন্য $\mathbf{R}$ এ $F(x)$ নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ৪। $F(x) = \sqrt{1-x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। $F(-3), F(0), F(\frac{1}{2}), F(1), F(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান : $F(x) = \sqrt{1-x} \in R$ যদি ও কেবল যদি $1 - x \geq 0$ বা $1 \geq x$ অর্থাৎ, $x \leq 1$ হয়। সুতরাং ডোম $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ এখানে $F(-3) = \sqrt{1-(-3)} = 4 = 2$; $F(0) = \sqrt{1} = 1$.

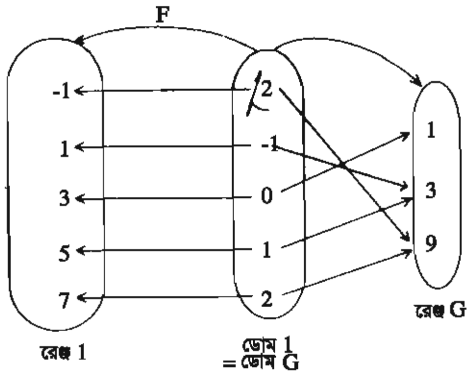
$$F(\frac{1}{2}) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; F(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$F(2)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $2 \notin$ ডোম $F$.

৫.৪। এক-এক ফাংশন

$F = \{(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)\}$ এবং $G = \{(-2, 9), (-1, 3), (0, 1), (1, 3), (2, 9)\}$ অন্বয় দুইটি উভয়ই ফাংশন (এদের কোনোটিতেই একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই)।

লক্ষণীয় যে,



$F$ ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন। কিন্তু $G$ ফাংশনের অধীনে ডোমেনের দুইটি ভিন্ন সদস্যের ছবি একই $G(-1) = G(1) = 3, G(-2) = G(2) = 9.$

সংজ্ঞা। যদি কোনো ফাংশনের অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক–এক (One–one ) ফাংশন বলা হয়।

উপরে বর্ণিত $F$ ফাংশনটি এক–এক ফাংশন, $G$ ফাংশনটি এক–এক নয়।

দ্রষ্টব্য ১। উপরের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, $F$ একটি এক–এক ফাংশন হয় যদি ও কেবল যদি ডোম $F$ এর যে কোনো সদস্য $x_1, x_2$ এর জন্য $x_1 \neq x_2$ হলে $F(x_1) \neq F(x_2)$ হয়, অর্থাৎ, $F(x_1) = F(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

উদাহরণ ১। দেখাও যে,

$F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = ax + b$ অন্বয়টি এক–এক ফাংশন, যেখানে $a, b$ ধ্রুবক এবং $a \neq 0.$

সমাধান : যে কোনো $x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}$ এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি

$ax_1 + b = ax_2 + b$ বা, $ax_1 = ax_2$ বা, $x_1 = x_2$ হয়

$\therefore F$ এক–এক ফাংশন।

উদাহরণ ২। দেখাও যে, $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক–এক নয়।

সমাধান ঃ এখানে ডোম $F = \mathbf{R}$. $x_1 = -1, x_2 = 1$ নিয়ে দেখি যে,

$x_1 \in$ ডোম $F$, $x_2 \in$ ডোম $F$, $x_1 \neq x_2$,

কিন্তু $F(x_1) = F(-1) = (-1)^2 = 1, F(x_2) = F(1) = (1)^2 = 1$

অর্থাৎ, $F(x_1) = F(x_2)$, $\therefore$ $F$ এক–এক নয়।

দ্রষ্টব্য ২। কোন ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে। যেমন,

$G = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$ একটি ফাংশন, কিন্তু $G^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$ ফাংশন নয়। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, কোন ফাংশন এক–এক হলে তার বিপরীত অন্বয় অবশ্যই একটি ফাংশন। কারণ, $F$ এক এক ফাংশন হলে $F$ এ একই দ্বিতীয় উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই, সুতরাং $F^{-1}$ এ একই উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় থাকবে না।

## অনুশীলনী ৫.১

১। প্রদত্ত $S$ অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর এবং $S$ অথবা $S^{-1}$ ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর :

(ক) $S=\{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$

(খ) $S=\{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)(3, 8)\}$

(গ) $S=\{(\frac{1}{2}, 0), (1, 1), (1, -1), (\frac{5}{2}, 2), (\frac{5}{2}, -2)\}$

(ঘ) $S=\{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

(ঙ) $S=\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

২। প্রদত্ত $S$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং ডোম $S$ ও রেঞ্জ $S$ নির্ণয় কর,

যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(ক) $S = \{(x, y), : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

(খ) $S = \{(x, y), : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

(গ) $S = \{(x, y), : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

(ঘ) $S = \{(x, y), : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

৩। ২নং প্রশ্নে বর্ণিত অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর।

৪। ১নং ও ২নং প্রশ্নে বর্ণিত অন্বয়গুলোর মধ্যে যেগুলো ফাংশন সেগুলো এক-এক কি না তা নির্ধারণ কর।

৫। প্রদত্ত $F(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক-এক কি না তা নির্ধারণ কর :

(ক) $F(x) = 2x - 1$ (খ) $F(x) = (x - 1)^2$ (গ) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

(ঘ) $F(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ (ঙ) $F(x) = |x|$ (চ) $F(x) = e^x$

(ছ) $F(x) = 1nx$

৬। $F(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-2), F(0)$ এবং $F(2)$ নির্ণয় কর। (খ) $F(\frac{a+1}{2})$নির্ণয় কর, যেখানে $a \in \mathbf{R}$.

(গ) $F(x) = 5$ হলে $x$ নির্ণয় কর। (ঘ) $F(x) = y$ হলে, $x$ নির্ণয় কর যেখানে $y \in \mathbf{R}$

৭। $F(x) = (x-1)^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-5), F(-1), F(0), F(1)$ এবং $F(5)$ নির্ণয় কর।

(খ) $F(x) = 100$ হলে, $x$ নির্ণয় কর।

(গ) $F(x) = 0$ হলে, $x$ নির্ণয় কর।

(ঘ) $F(x) = y$ হলে, $x$ নির্ণয় কর, যেখানে $y > 0$.

৮। $F(x) = \sqrt{x - 1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(1), F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর। (খ) $F(a^2 + 1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in \mathbf{R}$.

(গ) $F(x) = 5$ হলে, $x$ নির্ণয় কর। (ঘ) $F(x) = y$ হলে, $x$ নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$.

৯। $F(x) = |x|$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-3), F(-1), F(0), F(1)$ এবং $F(3)$ নির্ণয় কর।

(খ) $F(x) = 4$ হলে, $x$ নির্ণয় কর।

(গ) $F(x) = 0$ হলে, $x$ নির্ণয় কর।

(ঘ) $F(x) = y$ হলে, $x$ নির্ণয় কর, যেখানে $y>0$

১০। $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য

(ক) ডোম $F$ এবং রেঞ্জ $F$ নির্ণয় কর। (খ) দেখাও যে, $F$ এক-এক ফাংশন।

(গ) $F^{-1}$ নির্ণয় কর। (ঘ) দেখাও যে, $F^{-1}$ একটি ফাংশন।

## ৫.৫ । অন্বয়ের লেখচিত্র (Graph of a Relation)

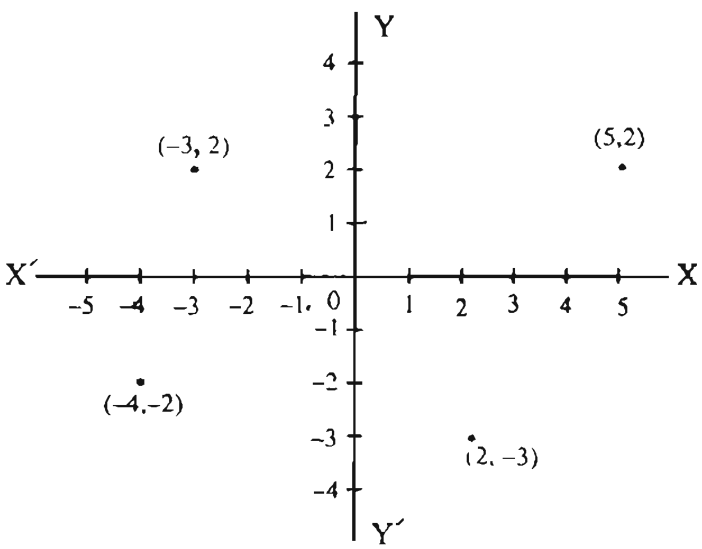
ছক-কাগজে দুইট পরস্পর লম্ব সংখ্যারেখাকে অক্ষরেখা ধরে বাস্তব সংখ্যার যে কোনো ক্রমজোড় $(x, y)$ এর প্রতিরূপী বিন্দু পাতন করা যায় (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। $\mathbf{R}$ এ বর্ণিত কোনো অন্বয় $S$ এরূপ $(x, y)$ ক্রমজোড়ের সেট হওয়ায় স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজে $S$ এর সদস্য সকল ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী বিন্দু পাতন করে $S$ এর চিত্ররূপ বর্ণনা করা যায়। এই চিত্ররূপই $S$ এর লেখচিত্র (graph)।

**সান্ত অন্বয়ের লেখচিত্র**

$S$ যদি $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এর সান্ত উপসেট হয়, তবে $S$ এর লেখ কতকগুলো বিচ্ছিন্ন বিন্দুর সেট।

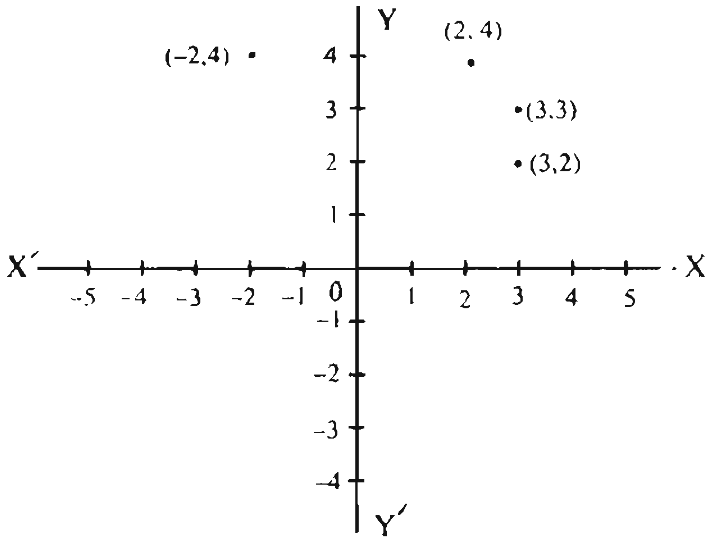
ছক কাগজে $x$ অক্ষ ও $y$ অক্ষ এঁকে সুবিধামত একক নিয়ে বিন্দুগুলো পাতন করলেই লেখচিত্র অঙ্কিত হয়। (বর্ণনার জন্য মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ ১। $S = \{(2, -3), (5, 2), (-3, 2), (-4, -2)\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র নিম্নে দেখান হল :




মন্তব্য। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, $y$ অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় লেখচিত্রের একাধিক বিন্দু অবস্থিত নয়, অর্থাৎ, $S$ এর কোনো দুইটি সদস্যেরই একই প্রথম উপাদান নেই। সুতরাং $S$ একটি ফাংশন। $(0, 2)$ বিন্দুগামী $x$ অক্ষের সমান্তরাল রেখায় লেখের দুইটি বিন্দু অবস্থিত, অর্থাৎ, $S$ এর দুইটি সদস্যের দ্বিতীয় উপাদান $2$। সুতরাং ফাংশনটি এক-এক নয়। এভাবে লেখচিত্র দেখে কোনো অন্বয় ফাংশন কি না এবং ফাংশন হলে এক-এক ফাংশন কি না বোঝা যায়।

উদাহরণ ২। $S = \{(3, 2), (2, 4), (3, 3), (-2, 4)\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হল :




মন্তব্য। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, $(3, 0)$ বিন্দুগামী y অক্ষের সমান্তরাল রেখায় লেখচিত্রের দুইটি বিন্দু অবস্থিত, অর্থাৎ, S এর দুইটি সদস্যের প্রথম উপাদান 3। সুতরাং S ফাংশন নয়।

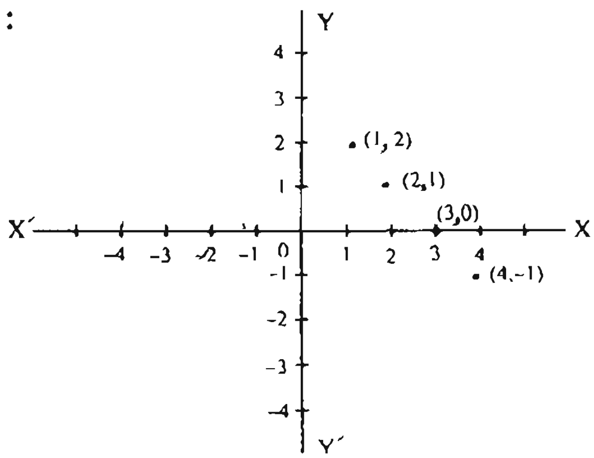
উদাহরণ ৩। মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $S = \{(x, y),$ ঃ $x \in A$ এবং $x + y = 3$.

এখানে S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ : $x + y = 3$ বা, $y = 3 - x$ থেকে x ও y এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় :

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1 | 0 | −1 |

$\therefore S = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\}$

S এর লেখ নিম্নে দেখানো হল :



**সরল রৈখিক লেখচিত্র (Linear graph)**

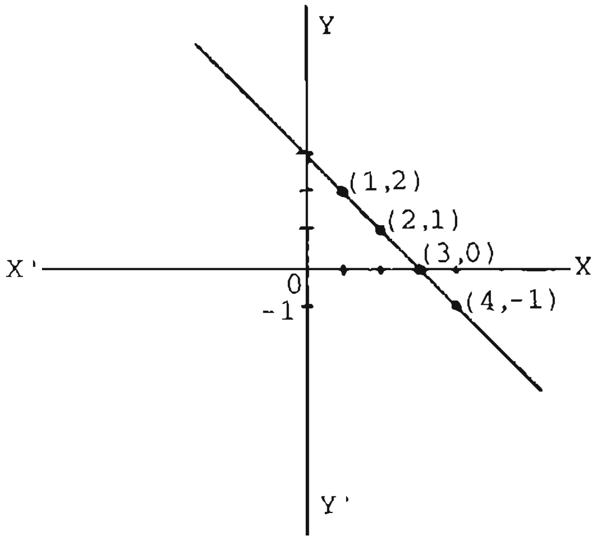
উল্লেখ্য যে, a, b ও c ধ্রুবক এবং a ও b উভয়ই শূন্য না হলে **R** এ

$L = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$

অন্বয়ের লেখচিত্র একটি সরলরেখা (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। এরূপ লেখ অঙ্কনের জন্য L এর বর্ণনাকারী সমীকরণে x বা y এর কয়েকটি সুবিধাজনক মান বসিয়ে y বা x এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করে L এর কয়েকটি সদস্য ক্রমজোড় নির্দিষ্ট করা হয়। অতঃপর রুলার ধরে বিন্দুগুলো যে সরলরেখায় অবস্থিত তা অঙ্কন করে লেখচিত্র পাওয়া যায়। জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে দুইটি বিন্দু দ্বারা একটি সরলরেখা নির্দিষ্ট হয়। সুতরাং সরল রৈখিক লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য দুইটি বিন্দু পাতনই যথেষ্ট। তবে সম্ভাব্য ভুল পরিহারের জন্য সাধারণত দুই এর অধিক বিন্দু পাতন করা হয়ে থাকে।

উদাহরণ ৪। $L = \{(x, y) : x + y = 3\}$ অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য উদাহরণ ৩ এর অনুরূপ ছক তৈরি করে দেখি যে,

$S = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\} \subset L$. এখন S এর লেখ অঙ্কন করে বিন্দুগুলোর সংযোজক রেখা আঁকলেই L এর লেখ পাওয়া যাবে।




**বৃত্ত লেখচিত্র**

উল্লেখ্য যে, p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে **R** এ

$S = \{x, y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\}$

অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q ) এবং ব্যাসার্ধ r (মাধ্যমিক বীজগণিত পস্তক দ্রষ্টব্য)।

ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

মন্তব্য। যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, তার লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হল যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে (free hand) ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন দ্ব্যর্থহীনভাবে বোঝা যায়।

কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, তার জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পন্থা অবলম্বন করা হল।

উদাহরণ ৫। $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$

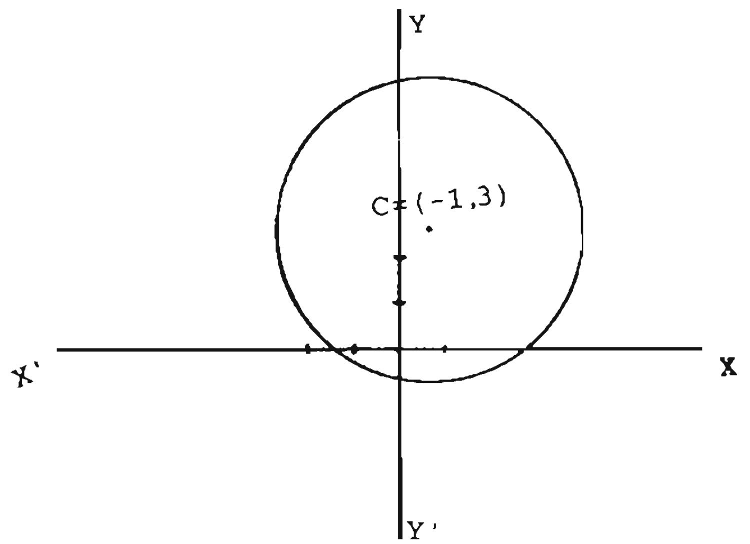
অন্বয়ের বর্ণনাকারী সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

বা, $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 1 + 9 + 6$

বা, $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16 = 4^2$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $C(-1, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হল :




পরাবৃত্ত লেখচিত্র

$a > 0$ হলে $S = \{(x, y) : y = ax^2\}$ ..........................................................................(1)

আকারের অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য $y = ax^2$ সমীকরণটি বিবেচনা করে দেখা যায় যে,

(ক) $(0, 0) \in S$ ; সুতরাং লেখচিত্র মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

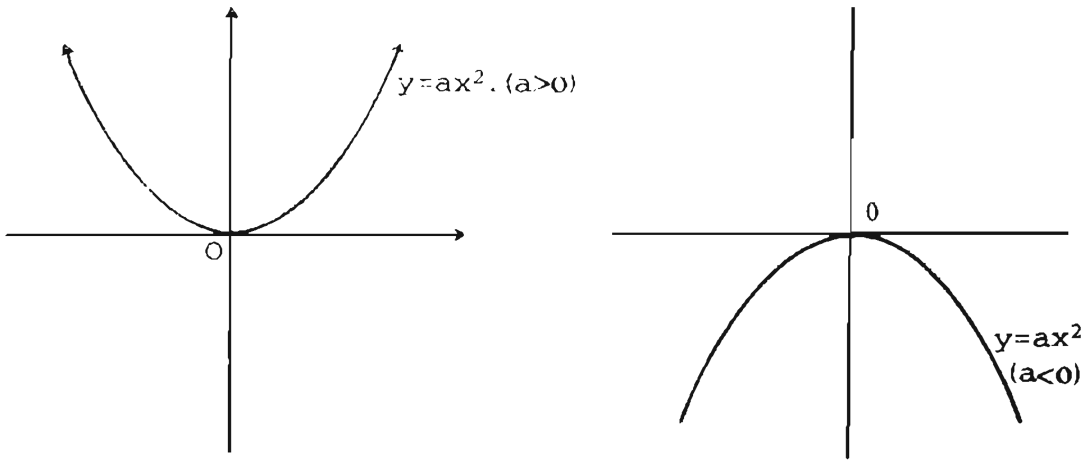
(খ) যে কোনো x এর জন্য $y \geq 0$; সুতরাং লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে x অক্ষের ঊর্ধ্ব–অর্ধতলে থাকবে।

(গ) প্রত্যেক ধনাত্মক y এর জন্য সমীকরণটি থেকে x এর দুইটি সংশ্লিষ্ট মান $x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$ পাওয়া যায়।

সুতরাং যে কোনো $y > 0$ এর জন্য $(\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ ও $(-\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ উভয়ই S এর সদস্য। এদের প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি y অক্ষের দুই পাশে y অক্ষ থেকে সমদুরে অবস্থিত। ফলে y অক্ষ সাপেক্ষে লেখ প্রতিসম।

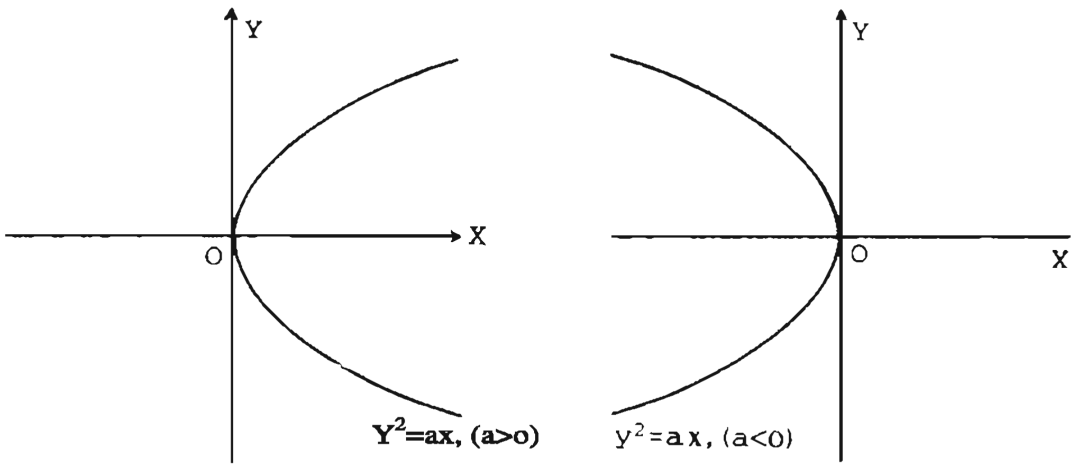
(ঘ) সমীকরণটি থেকে যথেচ্ছ বড় ধনাত্মক y এর জন্য সংশ্লিষ্ট x নির্ণয় করা যায়। সুতরাং x অক্ষের উপর অর্ধতলে লেখচিত্রের বিস্তৃতি সীমাহীন।

এখন সমীকরণটির যথেষ্ট সংখ্যক সমাধান (x, y) নির্ণয় করে এবং ছক কাগজে তাদের প্রতিরূপী বিন্দুগুলো পাতন করে বিন্দুগুলোকে সহজভাবে পরপর যুক্ত করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যাবে।




এরূপ লেখচিত্রকে পরাবৃত্ত (Parabola ) বলা হয়।

$a < 0$ হলে (1) এর লেখচিত্রও একটি পরাবৃত্ত যা সম্পূর্ণভাবে x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে থাকে। একই ভাবে দেখা যায় যে, $S = \{(x, y) : y^2 = ax\}$ আকারের অন্বয়ের লেখচিত্র নিম্নরূপ :



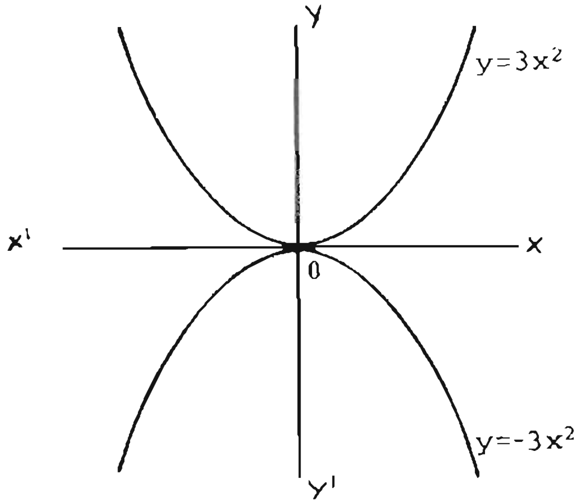

এক্ষেত্রেও, লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত, যা x অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম এবং y অক্ষের ডান-অর্ধতলে থাকে (যখন $a > 0$) অথবা বাম-অর্ধতলে থাকে (যখন $a < 0$ )

উদাহরণ ৬। একই চিত্রে $S_1 = \{(x, y) : y = 3x^2\}$. $S_2 = \{(x, y)\ y = -3x^2\}$ অন্বয় দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : লক্ষ্য করি যে, দুইটি অন্বয়েরই বর্ণনাকারী সমীকরণ $y = ax^2$ আকারের, যেখানে $S_1$ এর ক্ষেত্রে $a>0$ এবং $S_2$ এর ক্ষেত্রে $a<0$। সুতরাং লেখচিত্র দুইটি মূলবিন্দুগামী পরাবৃত্ত এবং y অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। $S_1$ এর লেখচিত্র x অক্ষের উর্ধ্ব-অর্ধতলে এবং $S_2$ এর লেখচিত্র x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে থাকবে।

এখন বর্ণনাকারী সমীকরণ থেকে $x = 0, \pm \cdot 5, \pm 1, \pm 1 \cdot 5, \pm 2, \pm 2 \cdot 5, \pm 3$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

| x | $y = 3x^2$ | $y = -3x^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| ± ·5 | ·75 | –·75 |
| ± 1 | 3 | –3 |
| ± 1·5 | 6·75 | –6·75 |
| ± 2 | 12 | –12 |
| ± 2·5 | 18·75 | –18·75 |
| ± 3 | 27 | 27 |




এখন ছক কাগজে x অক্ষ $X'OX$ এবং y অক্ষ $Y'OY$ নেই। x অক্ষে ছোটবর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের চারগুণকে এবং y অক্ষে ছোটবর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছকে বর্ণিত (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি এবং স্থানাঙ্ক লিখে চিহ্নিত করি। x অক্ষের উপর-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $S_1$ এর লেখচিত্র এবং x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $S_2$ এর লেখচিত্র পাওয়া গেল। লেখচিত্রের পাশে সমীকরণ উল্লেখ করে লেখচিত্র দুইটিকে নির্দিষ্ট করি।

উদাহরণ ৭। একই চিত্রে $S_1 = \{(x, y) : y^2 = 25x\}$ এবং

$S_2 = \{(x, y) : y^2 = -25x\}$ অন্বয় দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : লক্ষ করি দুইটি অন্বয়েরই বর্ণনাকারী সমীকরণ $y^2 = ax$ আকারের যেখানে $S_1$ এর ক্ষেত্রে $a>0$ এবং $S_2$ এর ক্ষেত্রে $a<0$. সুতরাং লেখচিত্র দুইটি মূলবিন্দুগামী পরাবৃত্ত এবং x অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। $S_1$ এর লেখচিত্র y অক্ষের ডান-অর্ধতলে এবং $S_2$ এর লেখচিত্র y অক্ষের বাম– অর্ধতলে থাকবে।

এখন $S_1$ এর ক্ষেত্রে বর্ণনাকারী সমীকরণ $y^2 = 25x$ থেকে দেখি যে $y = \pm\sqrt{25x}$ যেখানে $x > 0$। এই সমীকরণ থেকে $x = 0, 1, 2, 4, 6, 9$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

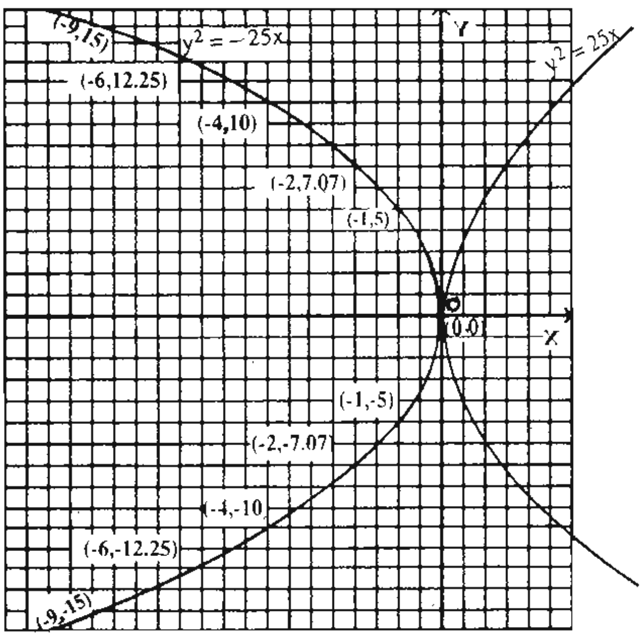
| x | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \pm\sqrt{25x}$ | 0 | ± 5 | ± 7·07 | ± 10 | ± 12·25 | ± 15 |

একইভাবে $S_2$ এর ক্ষেত্রে $y^2 = \sqrt{-25x}$ সমীকরণ থেকে দেখি যে $y = \sqrt{-25x}$ , যেখানে $x \leq 0$। এই সমীকরণ থেকে $x = 0, -1, -2, -4, -6, -9$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

| x | 0 | –1 | –2 | –4 | –6 | –9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \pm\sqrt{-25x}$ | 0 | ±5 | ±7·07 | ±10 | ±12·25 | ±15 |

ছক কাগজে x অক্ষ $XOX'$ ও y অক্ষ $YOY'$ নেই। x অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে এবং y অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছক দুইটিতে বর্ণিত (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি এবং স্থানাঙ্ক লিখে চিহ্নিত করি। y অক্ষের ডান-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $S_1$ এর লেখচিত্র এবং y

অক্ষের বাম-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $S_2$ এর লেখচিত্র পাওয়া গেল। লেখচিত্রের পাশে সমীকরণটিকে উল্লেখ করে লেখচিত্র দুইটিকে নির্দিষ্ট করি।




দ্রষ্টব্য। সাধারণভাবে $y = ay^2 + by + c, (a \neq 0)$

অথবা $x = ay^2 + by + c, (a \neq 0)$ আকারের সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত অন্বয় একটি পরাবৃত্ত।

উদাহরণ। $S = \{(x, y) : y = 3 - 4x - 2x^2\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $S$ এর বর্ণনাকারী সমীকরণটি $y = ax^2 + bx + c$ আকারের; ফলে লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত।

সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = -2(x^2 + 2x + 1) + 5$

বা, $y - 5 = -2(x + 1)^2$ বা, $(x + 1)^2 = -\frac{1}{2}(y - 5)$ বা, $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}(5 - y)$.

সুতরাং দেখা যায় যে সমীকরণটিতে

(১) $y$ এর মান 5 অপেক্ষা বড় হতে পারে না, (২) $y = 5$ হলে, $x + 1 = 0$ বা, $x = -1$

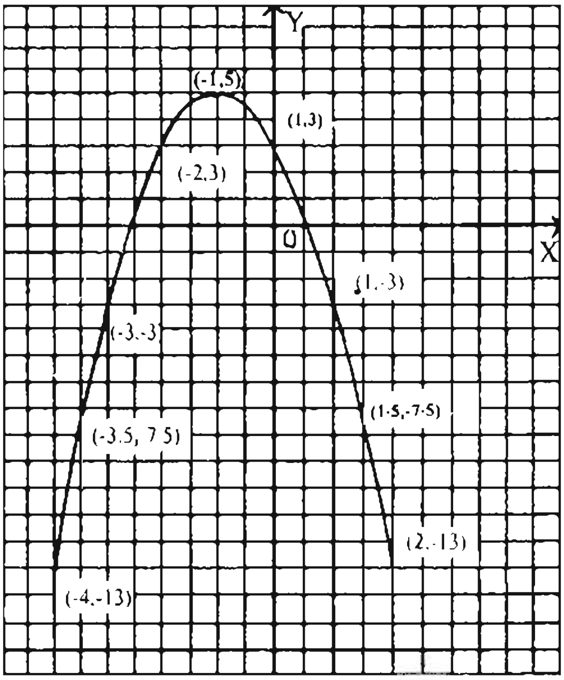
(৩) $y < 5$ হলে $x + 1 = \pm\sqrt{\frac{5-y}{2}}$ বা, $x = -1 \pm \sqrt{\frac{5-y}{2}}$

তদুপরি, লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দু স্থানাঙ্ক নিম্নরূপ (এখানে প্রথমে $y$ এর মান নির্দিষ্ট করে $x$ এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করা হয়েছে) :

| x | –1 | –2 | 0 | –3 | 1 | –3·5 | 1·5 | –4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 3 | 3 | –3 | –3 | –7·5 | –7·5 | –13 | –13 |

এখন ছক কাগজের ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে $x$ অক্ষে একক ও ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে $y$ অক্ষে একক

ধরে কাগজটিকে স্থানাঙ্কায়িত করি এবং উপরিউক্ত বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে যুক্ত করে নির্ণেয় লেখচিত্র টানি।




**উপবৃত্ত লেখচিত্র**

$a > 0$ ও $b > 0$ এবং $a \neq b$ ধরে $S = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

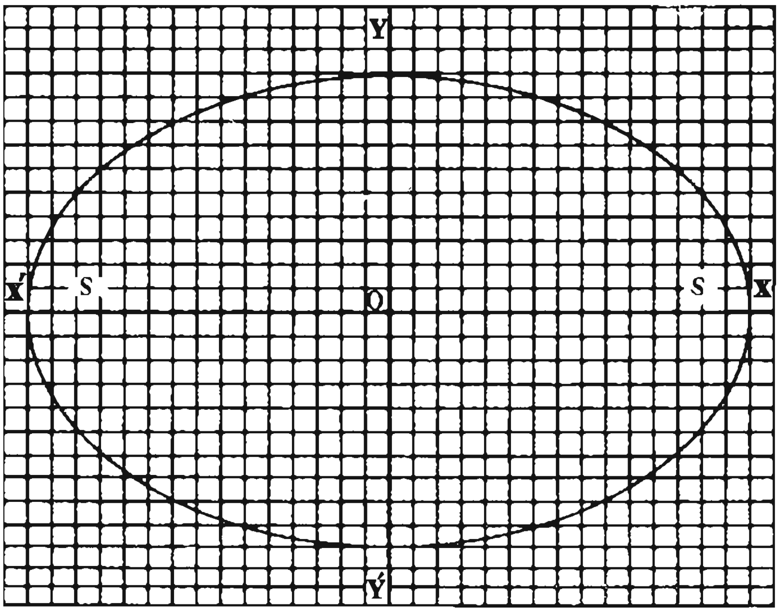
আকারের অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য বর্ণনাকারী সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ থেকে দেখা যায় যে :

(ক) সমীকরণটিকে $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ বা, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ আকারে লেখা যায়। সুতরাং সমীকরণটিতে অবশ্যই $x^2 \leq a^2$ বা, $|x| \leq a$ বা, $-a \leq x \leq a$ হবে। সমীকরণটিকে $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$

বা $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ আকারেও লেখা যায়। সুতরাং সমীরকরণটিতে অবশ্যই $y^2 \leq b^2$ বা $|y| \leq b$ বা $-b \leq y \leq b$ হবে। এ অবস্থায় S এর লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে $x = \pm a$, $y = \pm b$ রেখা দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত হবে।

খ) সমীকরণটিতে $x = a$ অথবা $x = -a$ হলে $y = o$ হয় এবং $-a < x < a$ হলে $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ হয়। সুতরাং লেখচিত্র $(a, 0)$, $(-a, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষ সাপেক্ষ প্রতিসম হয়। আবার সমীকরণটিতে $y=b$ অথবা $y = -b$ হলে $x = 0$ হয় এবং $-b < y < b$ হলে $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ হয়।
সুতরাং লেখচিত্র $(0, b)$ ও $(0, -b)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং y অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

সমীকরণটি থেকে লেখচিত্রস্থিত যথেষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে বিন্দুগুলোকে স্থানাঙ্কায়িত সমতলে স্থাপন করলে এবং প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে পরপর যুক্ত করলে নিম্নরূপ একটি আবদ্ধ বক্ররেখা পাওয়া যায়।




এরূপ লেখকে উপবৃত্ত (ellipse) বলা হয়। সাধারণভাবে, $a > 0$ ও $b > 0$ হলে এবং $a \neq b$ হলে $a(x-h)^2 + b(y-k)^2 = 1$ আকারের সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত অন্বয়ের লেখচিত্র একটি উপবৃত্ত।

উদাহরণ। $S = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : সমীকরণটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকারের। ফলে, লেখচিত্র একটি উপবৃত্ত। সমীকরণটি হতে পাওয়া যায় :

$y^2 = 4(1 - \frac{x^2}{9})$ বা, $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

যেখানে $-3 \leq x \leq 3$

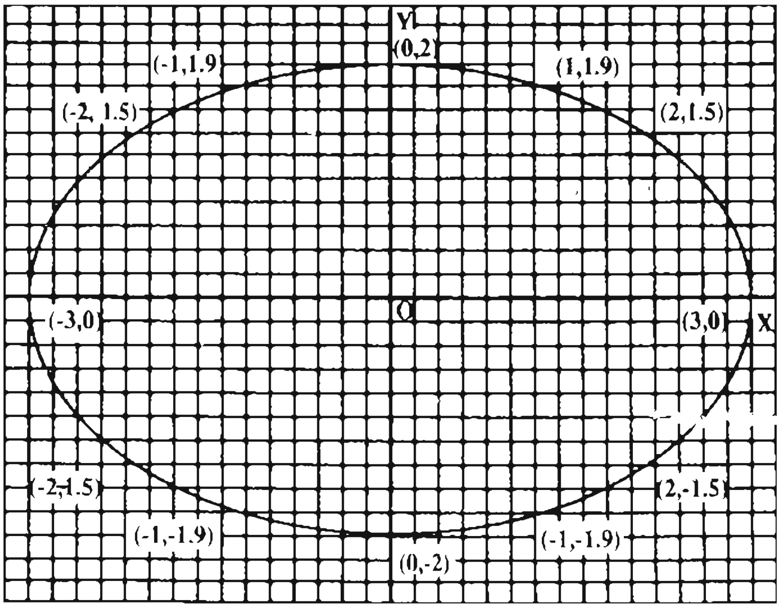
$x^2 = 9(1 - \frac{y^2}{4})$ বা, $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$,

যেখানে $-2 \leq y \leq 2$

এই সম্পর্কগুলো থেকে লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | –3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | –1 | –1 | 2 | 2 | –2 | –2 |
| y | 0 | 0 | –2 | 2 | 1·9 | –1·9 | 1·9 | –1·9 | –1·5 | 1·5 | 1·5 | –1·5 |

এখন ছক কাগজের ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের ৫ গুণকে একক ধরে কাগজটিকে স্থানাঙ্কায়িত করি এবং নির্ণীত বিন্দুগুলোকে স্থাপন করি। প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীল বক্ররেখায় যুক্ত করে উপবৃত্ত লেখচিত্রটি অঙ্কিত হল ।




## অনুশীলনী ৫.২

১। অনুশীলনী ৫·১ এর প্রশ্ন ১ এ বর্ণিত অন্বয়গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

২। অনুশীলনী ৫·১ এর প্রশ্ন ২ এ বর্ণিত অন্বয়গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৩। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{ (x, y) : x + y = 1\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{ (x, y) : x = -2\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : y = 4\}$.

৪। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

(খ) $S = \{ (x, y) : x^2 + (y-1)^2 = 16\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0\}$

(ঘ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y - 2x - 4y - 11 = 0\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \geq 0\}$

(চ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 9$ এবং $x \geq 0\}$.

৫। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : y = 2x^2\}$ (খ) $S = \{ (x, y) : y = -4x^2\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : y^2 = 9x\}$ (ঘ) $S = \{ (x, y) : y^2 = -16x\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : y = x^2 - 4x + 7\}$ (চ) $S = \{ (x, y) : y = -x^2 - 2\}$

(ছ) $S = \{ (x, y) : y^2 = x - 2\}$ (জ) $S = \{ (x, y) : (y - 1)^2 = 4x\}$

৬। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1\}$

(খ) $S = \{ (x, y) : 2x^2 + y^2 = 2\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : (x - 1)^2 + 4y^2 = 16\}$.

# বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

## বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। {(2,2), (4,2), (2,10), (5,10), (7,7)} অন্বয়ের ডোমেন কোনটি ?

ক. {2, 4, 5, 7} খ. {2, 2, 10, 7}

গ. {2, 2, 10, 7} ঘ. {2, 4, 2, 5, 7}

২। $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য ?

ক. (2, 4) খ. (–2, 4)

গ. (–1, 1) ঘ. (1, –1)

৩। যদি S = {(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)} হয়, তবে

i. S অন্বয়ের রেঞ্জ, S = {4, 1, 0, 4}

ii. S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1}$ = {(4, 1), (1,2), (0,3), (1,4), (4,5)}

iii. S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে নিচের ৪ - ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যদি $F(x) = \sqrt{(x-1)}$

৪। $F(10) =$ কত ?

ক. 9 খ. 3

গ. –3 ঘ. $\sqrt{10}$

৫। $F(x) = 5$ হলে, x এর মান কত ?

ক. 5 খ. 24

গ. 25 ঘ. 26

৬। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি ?

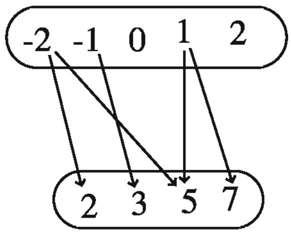
ক. ডোম, $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ খ. ডোম, $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

গ. ডোম, $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ ঘ. ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

## সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $\{2, 3, 5, 7\}$

A সেটের কয়েকটি উপাদানের সাথে B সেটের কয়েকটি উপাদানকে অন্বিত করে নিম্নের চিত্রে দেখানো হল :




ক. গঠিত অন্বয়টি D হলে, D এর মান ক্রমজোড়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S এবং রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

গ. উপরে বর্ণিত অন্বয়টির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি-না তা লেখচিত্র হতে নির্ণয় কর।

২। $F(x) = 2x - 1$

ক. $F(x+1)$ এবং $F(\frac{1}{2})$ নির্ণয় কর।

খ. F(x) ফাংশনটি এক-এক কি-না তা নির্ধারণ কর।

গ. $F(x) = y$ হলে x- এর তিনটি মান নির্ণয় কর, যখন, $x, y \in N$

এবং $y = 2x-1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৩। $F : R_+ \to R_+, F(x) = x^2$

ক. $R_+$ কিসের সেট নির্দেশ করে। ডোম F কত?

খ. কোন শর্ত সাপেক্ষে কোন ফাংশন এক-এক হবে? দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।

গ. রেঞ্জ F নির্ণয় কর। $F(x) = 100$ হলে, x নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

# এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ ও অসমতা

## ৬.১। মূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সমীকরণের চলকের বর্গমূল সম্বলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে বীজগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো বীজ প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের বীজ অবান্তর (extraneous) বীজ। সুতরাং মূলচিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ার প্রাপ্ত বীজগুলো প্রদত্ত সমীকরণের বীজ কি না তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব বীজ উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের বীজ। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

সমাধান : $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

বা, $\sqrt{2x+15} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{8x+9}$

$\Rightarrow 2x + 15 + 2x - 6 + 2\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 8x + 9$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x+15}\ \sqrt{2x-6} = 2x$

$\Rightarrow (2x + 15)(2x - 6) = 4x^2$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 18x - 90 = 4x^2$

বা, $18x = 90$

$\therefore x = 5$

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $\sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$ এবং ডানপক্ষ $= \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 5$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

সমাধান : $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

$\Rightarrow x + 4 + x + 11 + 2\sqrt{(x+4)(x+11)} = 8x + 9$ [বর্গ এবং পরে পক্ষান্তর করে]

বা, $2\sqrt{x^2+15x+44} = 6x - 6$ [পক্ষান্তর ও সরল করে]

বা, $2\sqrt{x^2+15x+44} = 3x - 3$

বা, $8x^2 - 33x - 35 = 0$ [আবার বর্গ করে এবং পরে পক্ষান্তর করে]

$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 7x - 35 = 0$

বা, $(8x + 7)(x - 5) = 0$

$\therefore x = -\dfrac{7}{8}$ অথবা 5.

$x = -\frac{7}{8}$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{4 - \frac{7}{8}} + \sqrt{11 - \frac{7}{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} + \frac{9}{\sqrt{8}} = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

ডানপক্ষ $= \sqrt{9 - 8.\frac{7}{8}} = \sqrt{2}$

$\therefore x = -\frac{7}{8}$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = 3 + 4 = 7$

ডানপক্ষ $= \sqrt{8.5+9} = 7$

$\therefore x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 5$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

সমাধান : $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow 2x + 9 + x - 4 - 2\sqrt{(2x+9)(x+4)} = x + 1$ [বর্গ করে]

বা, $2\sqrt{2x^2 + x - 36} = 2x + 4$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 36 = x^2 + 4x + 4$

বা, $x^2 - 3x - 40 = 0$

বা, $(x-8)(x+5) = 0$

$\therefore x = 8$ অথবা $-5$

$x = 8$ হলে, বামপক্ষ $= 5 - 2 = 3$ এবং ডানপক্ষ $= 3$

অতএব, $x = 8$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x = -5$ বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 8$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

সমাধান : $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

বা, $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2} = -\sqrt{x^2 - 7x + 12}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = x^2 - 7x + 12$ [বর্গ করে]

বা, $2\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = 4x - 8$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = (2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$ অথবা $x = 3$.

এখানে, $x = 2$ হলে বামপক্ষ $= \sqrt{2}$ = ডানপক্ষ

এবং $x = 3$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 2, 3$.

উদাহরণ ৫ । সমাধান কর : $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

সমাধান : $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এখন $x^2 - 6x = y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$\sqrt{y + 15} - \sqrt{y + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y + 15} + \sqrt{8} = \sqrt{y + 13} + \sqrt{10}$

$\Rightarrow y + 15 + 8 + 2\sqrt{8y + 120} = y + 13 + 10 + 2\sqrt{10y + 130}$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{8y + 120} = \sqrt{10y + 130}$

$\Rightarrow 8y + 120 = 10y + 130$

বা, $10y - 8y = 120 - 130$ [বর্গ করে]

বা, $2y = -10$ বা $y = -5$

বা, $x^2 - 6x = -5$ [ $y$ এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$ বা $(x - 1)(x - 5) = 0$

$\therefore x = 1$ অথবা 5.

$x = 1$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8}$ = ডানপক্ষ

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 1, 5$.

উদাহরণ ৬ । সমাধান কর : $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

সমাধান : $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 1 + x + 1 - x + 3(1 + x) \quad (1 - x)^{\frac{1}{3}} \left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\} = 2$ [ঘন করে]

বা, $2 + 3(1 + x)^{\frac{1}{3}} (1 - x)^{\frac{1}{3}} 2 = 2$ বা, $3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} (1 + x)^{\frac{1}{3}} . (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$ বা $(1 + x)(1 - x) = 0$ [আবার ঘন করে]

$x = 1$ এবং $x = -1$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore x = -1$ অথবা 1 $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm 1$

## অনুশীলনী ৬.১

সমাধান কর :

১। $\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

২। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

৩। $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

৪। $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2=0$

৫। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$

৬। $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x^2+4x-10}=6$

৭। $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-6x+6}=1$

৮। $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

৯। $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}+5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}=13$

১০। $\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)}=3$

## ৬.২। সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে।

$2^x = 8$, $16^x = 4^{x+2}$, $2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$ ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে $x$ অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয় :

$a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = m$ হয়। এজন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $2^{x+7} = 4^{x+2}$

সমাধান : $2^{x+7} = 4^{x+2}$ বা, $2^{x+7} = (2^2)^{x+2}$ বা, $2^{x+7} = 2^{2x+4}$

$\therefore\ x + 7 = 2x + 4$ বা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3.27^x = 9^{x+4}$

সমাধান : $3.27^x = 9^{x+4}$ বা, $3.\ (3^3)^x = (3^2)^{x+4}$

বা, $3.3^{3x} = 3^{2(x+4)}$ বা, $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$

$\therefore\ 3x + 1 = 2x + 8$ বা, $x = 7$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 7$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$, $(a > 0, a \neq 3, m \neq 0)$

সমাধান : $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$

বা, $\dfrac{3^{mx-1}}{3} = 3a^{mx-2}$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3^{mx-2} = a^{mx-2}$ বা, $\left(\dfrac{a}{3}\right)^{mx-2} = 1 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^0$

বা, $mx - 2 = 0$ বা, $mx = 2$ বা, $x = \dfrac{2}{m}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{2}{m}$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $2^{3x-5}.\ a^{x-2} = 2^{x-3}.\ 2a^{1-x}$, ($a > 0$ এবং $a \neq \dfrac{1}{2}$).

সমাধান : $2^{3x-5}.\ a^{x-2} = 2^{x-3}.\ 2a^{1-x}$

বা, $\dfrac{a^{x-2}}{a^{1-x}} = \dfrac{2^{x-3}.2^1}{2^{3x-5}}$ বা, $a^{x-2-1+x} = 2^{x-3+1-3x+5}$ বা, $a^{2x-3} = 2^{-2x+3}$

বা, $a^{2x-3} = 2^{-(2x-3)}$ বা, $a^{2x-3} = \dfrac{1}{2^{2x-3}}$ বা, $a^{2x-3}.2^{2x-3} = 1$

বা, $(2a)^{2x-3} = 1 = (2a)^0$

$\therefore\ 2x - 3 = 0$ বা, $2x = 3$ বা, $x = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{3}{2}$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \dfrac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}$, $(a > 0, b > 0$ এবং $ab \neq 1)$

সমাধান : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = 1 + \dfrac{1}{a^2b^2}$ বা, $a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + \dfrac{1}{a^2b^2}$

বা, $1 + (ab)^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$ বা, $(ab)^{-x} = (ab)^{-2}$

$\therefore -x = -2$ বা, $x = 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$.

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $3^{x+5} = 3^{x+3} + \dfrac{8}{3}$

সমাধান : $3^{x+5} = 3^{x+3} + \dfrac{8}{3}$ বা, $3^x.3^5 = 3^x3^3 + \dfrac{8}{3}$

বা, $3^x.3^6 - 3^x.3^4 = 8$ [পক্ষান্তর এবং উভয় পক্ষে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^x.3^4(3^2 - 1) = 8$ বা, $3^{x+4}.8 = 8$ বা, $3^{x+4} = 1 = 3^0$

$\therefore x + 4 = 0$ বা, $x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = -4$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর : $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$

সমাধান : $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$ বা, $\dfrac{3^{2x}}{9} - \dfrac{5}{9}.3^x - 66 = 0$

বা, $3^{2x} - 5.3^x - 594 = 0$ [উভয় পক্ষে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2 - 5a - 594 = 0$ ($3^x = a$ ধরে)

বা, $a^2 - 27a + 22a - 594 = 0$

বা, $(a - 27)(a + 22) = 0$

এখন $a \neq -22$, কেননা $a = 3^x > 0$ সুতরাং $a + 22 \neq 0$

অতএব, $a - 27 = 0$ বা, $3^x = 27 = 3^3$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\therefore x = 3$.

উদাহরণ ৮। সমাধান কর : $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$ $(a > o, a \neq 1)$

সমাধান : $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - a(a^2 + 1)a^x.a^{-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$

বা, $p^2 - (a^2 + 1)p + a^2 = 0$ ($a^x = p$ ধরে)

বা, $p^2 - a^2p - p + a^2 = 0$

বা, $(p - 1)(p - a^2) = 0$

$\therefore p = 1$ অথবা $p = a^2$

বা, $a^x = 1 = a^0$ বা, $a^x = a^2$

$\therefore x = 0$ $\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 0, 2$.

## অনুশীলনী ৬.২

সমাধান কর :

১। $3^{x+2} = 81$

২। $5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

৩। $2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

৪। $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$

৫। $(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[11]{64})^{2x+7}$

৬। $\dfrac{3^{2x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}\ (a > 0)$

৭। $\dfrac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6}\ (a > 0, b > 0, 5b \neq a)$

৮। $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

৯। $5^x + 5^{2-x} = 26$

১০। $3\ (9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

১১। $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

১২। $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

### ৬.৩। পরমমান সম্বলিত সমীকরণ

সংজ্ঞা। x কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে x এর পরমমান

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$$

যেমন, $|5| = 5, |0| = 0, |-5| = -(-5) = 5$

লক্ষণীয় যে,

(ক) $|x| = 0$ যদি ও কেবল যদি $x = 0$ হয়। $x \neq 0$ হলে $|x| > 0$

(খ) $|x|^2 = x^2$, সুতরাং $\sqrt{x^2} = |x|$.

(গ) $|x - a|$ হচ্ছে সংখ্যারেখায় a এর প্রতিরূপী বিন্দু থেকে x এর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $|x - 4| = 2$

সমাধান : $|x - 4| = 2$

বা, $x - 4 = 2$ (যখন $x - 4 > 0$)

বা, $x = 4 + 2$

বা, $x = 6$

অথবা $-(x - 4) = 2$ (যখন $x - 4 < 0$)

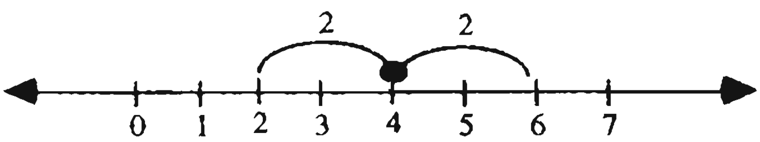
বা, $-x + 4 = 2$

বা, $x = 4 - 2$

বা, $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 6, 2$.

দ্রষ্টব্য ১। $|x - 4|$ হচ্ছে সংখ্যারেখায় 4 এর প্রতিরূপী বিন্দু থেকে x এর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব। সুতরাং



$|x-4| = 2$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = 4+2 = 6$ অথবা $x = 4-2 = 2$ হয়।

সাধারণভাবে, $d \geq 0$ হলে $|x-a| = d$ যদি ও কেবল যদি $x = a+d$ অথবা $x = a-d$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\frac{|x|}{x} + x^2 = 2$

সমাধান : $\frac{|x|}{x} + x^2 = 2 \qquad (1)$

এখানে $x \neq 0$ এবং $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

এখন $x > 0$ হলে (1) থেকে পাওয়া যায়,

$1 + x^2 = 2$ বা, $x^2 = 1$ বা, $x = 1$ ($x > 0$ বলে $x \neq -1$)

আবার, $x < 0$ হলে (1) থেকে পাওয়া যায়,

$-1 + x^2 = 2$ বা, $x^2 = 3$

বা, $x = -\sqrt{3}$ ($x < 0$ বলে $x \neq \sqrt{3}$)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, -\sqrt{3}$.

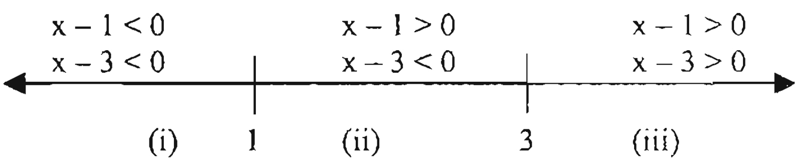
[শুদ্ধি পরীক্ষা : $x = 1$ হলে (1) এর বাম পক্ষ = $\quad + 1 = 2$

এবং $x = -\sqrt{3}$ হলে (1) এর বামপক্ষ = $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} + (-3)^2 = -1 + 3 = 2$]

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $|x-1| + |x-3| = 5$

সমাধান : $|x-1| + |x-3| = 5 \quad (1)$

লক্ষ করি ,




উল্লেখ্য $x - 1 < 0$ ও $x - 3 > 0$ ঘটনাটি অবাস্তব।

এখন (i) $x < 1$ অথবা (ii) $1 \leq x < 3$ অথবা $x \geq 3$ পৃথকভাবে বিবেচনা করি।

(i) হলে (1) থেকে $-(x-1) - (x-3) = 5$ বা, $-x + 1 - x + 3 = 5$

বা, $-2x = 5 - 1 - 3 = 1 \qquad \therefore x = -\frac{1}{2}$

এক্ষেত্রে যেহেতু $-\frac{1}{2} < 1$, সুতরাং $x = -\frac{1}{2}$

(ii) হলে (1) থেকে $x - 1 - (x - 3) = 5$ বা, $x - 1 - x + 3 = 5$ বা, $2 = 5$, যা অসম্ভব। সুতরাং এক্ষেত্রে কোনো সমাধান নেই।

(iii) হলে (1) থেকে $x - 1 + x - 3 = 5$ বা, $2x = 5 + 1 + 3 = 9$ বা, $x = \frac{9}{2}$

এক্ষেত্রে যেহেতু $\frac{9}{2} > 3$ সুতরাং $x = \frac{9}{2}$ গ্রহণযোগ্য $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$
[শুদ্ধি পরীক্ষা নিজে কর]

## অনুশীলনী ৬.৩

সমাধান কর :

১। $|x| = 3$ ২। $|x - 3| = 2$ ৩। $|x + 5| = 7$

৪। $|x + 2| = |x - 1|$ ৫। $|x| + |x + 1| = 5$ ৬। $|x - 1| = 2|x + 1|$

### ৬.৪। অসমতা

আমরা এখন কতিপয় অসমতার সমাধান নিয়ে আলোচনা করব (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকের প্রাসঙ্গিক আলোচনা দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ ১। সমাধান : $\frac{3x+1}{2x-1} > \frac{2x+1}{3x-1}$

সমাধান : $\frac{3x+1}{2x-1} > \frac{2x+1}{3x-1}$ ........ (1) যদি ও কেবল যদি $\frac{3x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{3x-1} > 0$

বা, $\frac{(3x+1)(3x-1)-(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)(3x-1)} > 0$

বা, $\frac{9x^2-1-4x^2+1}{(2x-1)(3x-1)} > 0$

বা, $\frac{5x^2}{(2x-1)(3x-1)} > 0$ বা, $(2x-1)(3x-1) > 0$ [ $5x^2 > 0$]

বা, $6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) > 0$ বা, $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) > 0$ ....... (2)

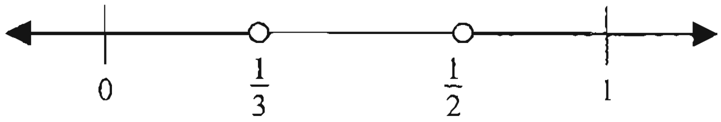
এখন $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) > 0$ যদি ও কেবল যদি $(x - \frac{1}{3})$ ও $(x - \frac{1}{2})$ উভয়ই ধনাত্মক হয় অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।
লক্ষ করি,

| যখন | $(x - \frac{1}{3})$ এর চিহ্ন | $(x - \frac{1}{2})$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|
| $x < \frac{1}{3}$ | $-$ | $-$ |
| $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ | $+$ | $-$ |
| $x > \frac{1}{2}$ | $+$ | $+$ |

সুতরাং (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$

মন্তব্য । এখানে সমাধান সেট $S = \{x : x < \frac{1}{3}\} \cup \{x : x > \frac{1}{2}\}$



উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\frac{3x+4}{5x+3} < \frac{x+2}{2x+3}$

সমাধান : $\frac{3x+4}{5x+3} < \frac{x+2}{2x+3}$ ........................(1) যদি ও কেবল যদি $\frac{3x+4}{5x+3} - \frac{x+2}{2x+3} < 0$

বা, $\frac{(3x+4)(2x+3) - (x+2)(5x+3))}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

বা, $\frac{6x^2 + 9x + 8x + 12 - 5x^2 - 3x - 10x - 6}{(5x+3)(2x+3)} < 0$ বা, $\frac{x^2+4x+6}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

বা, $\frac{x^2+4x+4+2}{(5x+3)(2x+3)} < 0$ বা, $\frac{(x+2)^2+2}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

কিন্তু সকল x এর জন্য $(x+2)^2 + 2 \geq 2 > 0$

সুতরাং (1) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(5x+3)(2x+3) < 0$ বা, $10(x+\frac{5}{3})(x+\frac{3}{5}) < 0$

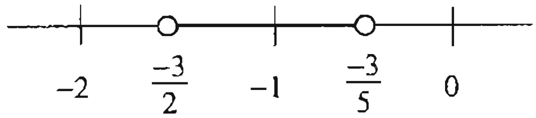
বা, $\{x - (-\frac{5}{3})\}\{x - (-\frac{3}{2})\} < 0$ ..............................(2)

লক্ষ করি,

| যখন | $\{x - (-\frac{3}{2})\}$ এর চিহ্ন | $\{x - (-\frac{3}{5})\}$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|
| $-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$ | + | − |

সুতরাং (২) সত্য হয় যদি ও কেবল যদি $-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$

মন্তব্য। এখানে সমাধান সেট $S = \{x : -\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}\}$



উদাহরণ ৩। সমাধান সেট নির্ণয় কর : $\frac{x-3}{x-4} > \frac{x-2}{x-1}$

সমাধান : $\frac{x-3}{x-4} > \frac{x-2}{x-1}$ ...........................(1) যদি ও কেবল যদি $\frac{x-3}{x-4} - \frac{x-2}{x-1} > 0$

বা, $\frac{(x-3)(x-1) - (x-2)(x-4)}{(x-4)(x-1)} > 0$ বা, $\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 6x - 8}{(x-4)(x-1)} > 0$