জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত।

প্রথম মুদ্রণ : জানুয়ারি, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০
পরিমার্জিত সংস্করণ : ডিসেম্বর, ২০০৮
পুনর্মুদ্রণ :

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড
৯৫৬২৮৬৫, ৯৫৬৭৬০৮

প্রচ্ছদ
সেলিম আহ্‌মেদ

চিত্রাঙ্কন
কাজী সাইফুদ্দীন আব্বাস
সুশান্ত কুমার অধিকারী

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

মুদ্রণ : A¼i AvBwmwU †W‡f jc‡g›U dvD‡Ûkb (I‡qe web¨vm)

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এ পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষা বিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায়, পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক–শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায় শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে কোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য জ্যামিতির ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। এ পুস্তকের বিষয়বস্তুতে যে সব বিষয় উপস্থাপন করা হয়েছে তা পাঠ করে শিক্ষার্থীরা মাধ্যমিক জ্যামিতির ধারণা ও প্রয়োগ সম্প্রসারণ করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবে বলে আশা করা যায়। এছাড়াও উচ্চতর গণিতে ভেক্টর, ঘন জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির প্রাথমিক ধারণাসমূহ সহজভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে। গণিতের নিজস্ব বৈশিষ্ট্য অক্ষুণ্ন রেখে শিক্ষার্থীদের মাঝে গণিতমনস্কতা সৃষ্টি করা অপরিহার্য। এদিকে বিশেষ লক্ষ্য রেখে নতুন ধ্যান-ধারণা সহজভাবে এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে অর্ধবাস্তব পর্যায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা নিজ প্রচেষ্টায় বা শিক্ষকের ন্যূনতম সহায়তায় বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে সক্ষম হবে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যে কোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মোঃ মোস্তফা কামালউদ্দিন

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

পূর্ব পঠিত বিষয়ের সংক্ষিপ্ত পর্যালোচনা

মাধ্যমিক জ্যামিতি খন্ডে শিক্ষার্থীগণ কোণ, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বৃত্তের ধর্ম ও অন্যান্য বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে কতকগুলো উপপাদ্য ও সম্পাদ্য অনুশীলন করেছে। সে সব ধারণা মাধ্যমিক উচ্চতর গণিতের জ্যামিতি অংশের পঠনে ও অনুশীলনে অহরহ প্রয়োগ করতে হবে। ব্যবহারের সুবিধার্থে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বৃত্ত সংক্রান্ত কিছু তথ্য সংক্ষেপে পুনরালোচনা করা হল। বিস্তারিত বিবরণের জন্য 'মাধ্যমিক জ্যামিতি' পুস্তকটি দেখা যেতে পারে।

১.১। ত্রিভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা :
দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে যদি–
(ক) একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়।
(খ) একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান হয়।
(গ) একটির দুই কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়।
(ঘ) তারা উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ হয়, তাদের অতিভুজদ্বয় সমান হয় ও একটির এক বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়।

২। ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হলে তাদের বিপরীত কোণদ্বয় সমান এবং দুইটি কোণ সমান হলে তাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান।

৩। ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর এবং দুইটি বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৪। ত্রিভুজের যেকোনো বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ ও ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ভূমির উপর লম্ব এবং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৬। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৭। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলো সমবিন্দু। এই বিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (incentre) যা ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৮। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু, এই বিন্দু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (circumcentre) যা ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৯। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু; এই বিন্দু ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Orthocentre)। ঐ লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় দিয়ে উৎপন্ন ত্রিভুজই মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ (Pedal triangle)।

১০। ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

১.২। চতুর্ভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান, বিপরীত কোণদ্বয় সমান এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

২। আয়তের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান, কোণগুলো সমান ও প্রত্যেকে এক সমকোণ এবং কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৩। রম্বসের চার বাহু সমান, বিপরীত কোণদ্বয় সমান, কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৪। বর্গের চার বাহু সমান, কোণগুলো সমান ও প্রত্যেকে এক সমকোণ এবং কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৫। সামান্তরিক, আয়ত, রম্বস ও বর্গের সাধারণ বৈশিষ্ট্য হল-
কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং প্রত্যেক কর্ণ প্রতিটি চিত্রকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। কেবলমাত্র বর্গ ও রম্বসের ক্ষেত্রে কর্ণদ্বয় সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

১.৩। বৃত্ত সংক্রান্ত তথ্য

১। বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন অন্য যেকোনো জ্যা–এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা–এর উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা–এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২। বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী এবং বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য সমান।

৩। বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

৪। একই বৃত্তাংশস্থিত কোণসমূহ পরস্পর সমান।

৫। অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

৬। কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে, তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

৭। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৮। বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

৯। বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

১০। দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করলে তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।

১.৪। সদৃশ ত্রিভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান এবং বিপরীতক্রমে দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।

২। দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান ও সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

৩। দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

১.৫। জ্যামিতিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত তথ্য

১। একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

২। একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক বা আয়ত একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হলে ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক ক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৩। পীথাগোরাসের উপপাদ্য: কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

৪। কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ এক সমকোণ হবে।

৫। ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(ক) ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য a এবং একই এককে উচ্চতা h হলে,
ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ah$ বর্গ একক।

(খ) কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য a, b, c হলে,

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

৬। সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (ভূমি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

৭। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ $\times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ (তাদের লম্ব দূরত্ব) বর্গ একক।

অনুশীলনী- ১

১। কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য x^2+1, x^2-1, $2x$ যেখানে, $x > 1$ ত্রিভুজটি কিরূপ হবে ?

২। কোনো ত্রিভুজের দুইটি বহিঃস্থ কোণ সমান। ঐ ত্রিভুজটি কিরূপ ?

৩। কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান। ত্রিভুজটি কী ধরনের ত্রিভুজ ?

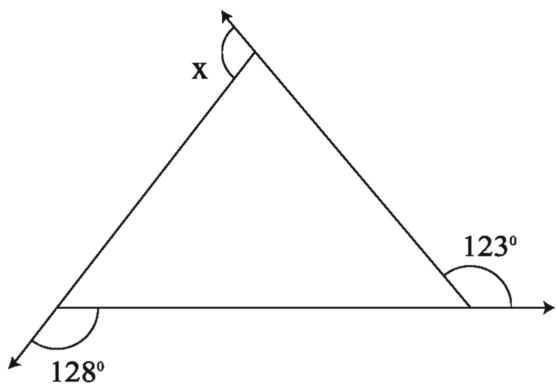
৪। কোনো সামান্তরিকের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 154^0 হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

৫। একটি সামান্তরিকের (একই বাহুসংলগ্ন) দুইটি সন্নিহিত কোণের অনুপাত 7 ঃ 8 হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলোর পরিমাপ কত ?

৬। কোনো রম্বসের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অনুপাত 5 ঃ 4 হলে, রম্বসটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

৭। একটি ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 মি. ও 4 মি. এবং ক্ষেত্রফল 28 বর্গমি. হলে, ভূমির বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

৮। পাশের চিত্র থেকে x কোণ নির্ণয় কর।



৯। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.5 সে. মি. হলে, তার বৃহত্তম জ্যা–এর দৈর্ঘ্য কত ?

১০। কোনো বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা–এর দৈর্ঘ্য 16 সে. মি. ও 30 সে. মি. এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 17 সে. মি. হলে, ঐ জ্যাদ্বয়ের ব্যবধান কত?

১১। কোনো বৃত্তে AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং AD ও BC বৃত্তের ভিতরে O বিন্দুতে ছেদ করে। AO = 1.5 সে. মি. হলে, BO নিচের কোনটির সমান হবে ?

(ক) 1 সে. মি. (খ) 1.5 সে. মি. (গ) 2.0 সে. মি.

১২। কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ঐ বৃত্তের বৃত্তস্থ তিনটি বিন্দু A, P, B এবং $\angle APB = 90^0$ হলে, $\angle AOB$ কত ?

১৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BD = 2 সে. মি. হলে, CD এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি ?

(i) 2 সে. মি. (ii) 1 সে. মি. (iii) 1.5 সে. মি.

১৪। কোনো বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ 120^0 হলে, তার বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 120^0 (খ) 60^0 (গ) 30^0

১৫। একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় ও একটি তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 5 ও 2 সে. মি. অপর তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 4 সে. মি. (খ) 2 সে. মি. (গ) 1.5 সে. মি.

১৬। 3 সে.মি. ও 5 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের বৃহত্তরটির একটি জ্যা ক্ষুদ্রতরটির স্পর্শক হলে, এ জ্যা–এর দৈর্ঘ্য কত ?

১৭। কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD এবং AB ও CD বাহুর মোট দৈর্ঘ্য ১১ সে. মি. হলে, AD ও BC বাহুর মোট দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 12 সে. মি. (খ) 10 সে. মি. (গ) 11 সে. মি.

১৮। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। তাদের একটি ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. ও কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 7 সে. মি. হলে অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ? বৃত্তদ্বয় অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে ঐ ব্যাসার্ধ কত হবে ?

১৯। ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D কোণগুলোর অনুপাত 1 ঃ 4 ঃ 5 ঃ 2 হলে, চতুর্ভুজটি কি বৃত্তস্থ হবে ?

২০। কি শর্তে দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে (ক) ছেদ করতে (খ) স্পর্শ করতে পারে ?

২১। A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে এবং AB, BC, CA যথাক্রমে 5, 6, 7 সে. মি.। বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২২। যখন দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে (ক) ছেদ করে (খ) ছেদ করে না (গ) বহিঃস্পর্শ করে (ঘ) অন্তঃস্পর্শ করে (ঙ) এককেন্দ্রিক হয়, তখন তাদের কয়টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

২৩। কোনো বৃত্তের AB জ্যা–এর একই পার্শ্বে C, D দুইটি বৃত্তস্থ বিন্দু। A, C; B, C এবং B, D যোগ করা হল এবং AD কে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle BDE = 130^0$ হলে, $\angle ACB$ কত হবে?

২৪। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O। A এবং BC ঐ কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BOC = 120^0$ হলে, $\angle BAC$ কত হবে ?

২৫। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এর AB বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle CBE = 60^0$ হলে, $\angle ADC$ কত হবে ?

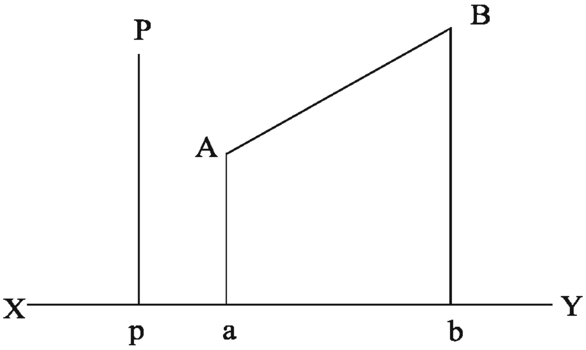
দ্বিতীয় অধ্যায়

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি

২.১। লম্ব অভিক্ষেপ

কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু বোঝায়।

মনে করি, XY একটি সরলরেখা। P বিন্দু থেকে XY রেখার উপর লম্বের পাদবিন্দু p; তাহলে XY রেখার উপর P বিন্দুর অভিক্ষেপ p বিন্দু।



আবার মনে করি, AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দু A ও B থেকে XY সরলরেখার ওপর লম্ব যথাক্রমে Aa এবং Bb। এই লম্বদ্বয় দ্বারা XY রেখার ওপর ab রেখাংশই, XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

লম্ব অঙ্কন করে অভিক্ষেপ নির্ণীত হয় বলে ab কে XY এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলা হয়।

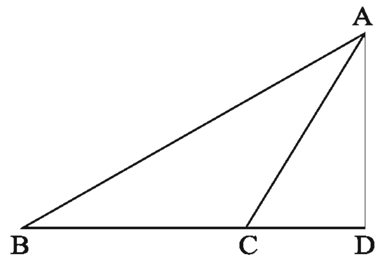
দ্রষ্টব্য : AB সরলরেখা XY রেখাংশের উপর লম্ব হলে ab এর দৈর্ঘ্য শূন্য হবে।

২.২। কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য - ২.১

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন : ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB, স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC, BC। মনে করি, BC রেখার ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD ।



প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD.$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle D$ এক সমকোণ।

$$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC+CD)^2$$
$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.\ CD$$

$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$$

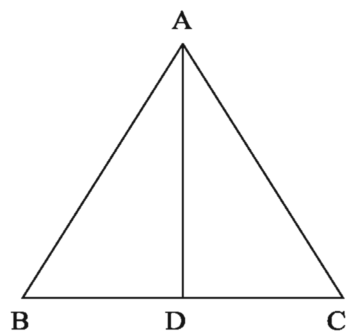
আবার ΔACD এর $\angle D$ এক সমকোণ হওয়ায়

$$AD^2 + CD^2 = AC^2$$

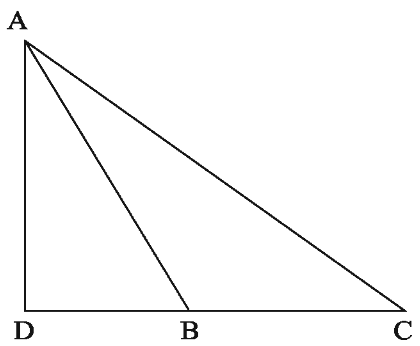
$$\therefore\ AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD.$$

উপপাদ্য - ২.২

যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।



চিত্র-১



চিত্র - ২

বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB, অপর বাহুদ্বয় AC ও BC। মনে করি, BC বাহুর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। সুতরাং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD (উভয় চিত্র)।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$.

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ এক সমকোণ। $\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2$.

কিন্তু $BD = BC - DC$ (চিত্র–১) অথবা $DC - BC$ (চিত্র–২)

$\therefore\ BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.DC$

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 - 2BC.\ DC = AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

আবার ΔADC এর $\angle D$ সমকোণ হওয়ায়, $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\therefore\ AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

একই পদ্ধতিতে C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কন করে অনুরূপ সূত্র প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য ১। সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের একটির উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য, সুতরাং $BC.\ CD = 0$

দ্রষ্টব্য ২। প্রকৃতপক্ষে উপপাদ্য ২.১ এবং ২.২ কে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি মনে করা যায়। তাই উক্ত তিনটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে নিম্নলিখিত তথ্যগুলো প্রমাণিত হয়েছে। কোনো ABC ত্রিভুজের

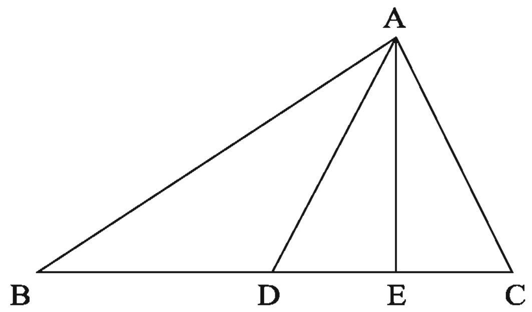
(ক) $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$

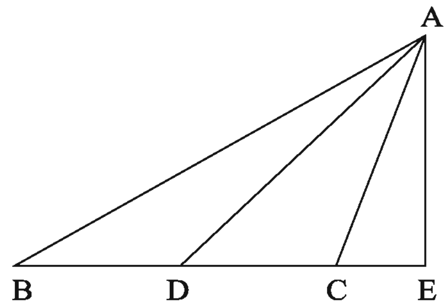
(খ) $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$

(গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $AB^2 < BC^2 + CA^2$

উপপাদ্য-২.৩

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর বর্গক্ষেত্র এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ (এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য)।





বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

অঙ্কন : BC এর বা BC এর বর্ধিতাংশের ওপর AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ একটি স্থূলকোণ এবং BD রেখায় A এর লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ DE$

আবার যেহেতু, ΔADC এর $\angle ADC$ একটি সূক্ষ্মকোণ DC রেখায় AD এর লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore\ AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.\ DE$ (উপঃ ২.২)

$$\therefore\ AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.\ DE - 2CD.DE$$
$$= 2AD^2 + 2BD^2 \text{ [কারণ, } BD = CD]$$
$$= 2(AD^2 + BD^2).$$

দ্রষ্টব্য ১। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং উহাদের ওপর অঙ্কিত মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f হলে, উপরোক্ত উপপাদ্য থেকে পাই

$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$\therefore\ b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

$\therefore\ d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপে $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

সুতরাং কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

আবার মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি $d^2 + e^2 + f^2$

$= \frac{1}{4}\{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) + 2(a^2 + b^2) - b^2 - c^2\}$

$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

অর্থাৎ $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

সুতরাং কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির তিনগুণ উহার মধ্যমাগুলোর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির চারগুণের সমান।

দ্রষ্টব্য ২। ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle C = 90^0$ হলে, $a^2 + b^2 = c^2$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$

কিন্তু দ্রষ্টব্য ১ থেকে

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3.2c^2$

$\therefore\ 2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর জন্য 2 (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি) $= 3c^2$, যেখানে $\angle C = 90^0$। অর্থাৎ, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান।

অনুশীলনী -২

১। ΔABC এর $\angle B = 60^0$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$.

২। ΔABC এর $\angle B = 120^0$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$.

৩। ΔABC এর $\angle C = 90^0$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$.

৪। ΔABC এর AD, BC এর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব হলে দেখাও যে, $BC.CD = AC.CE$.

[সংকেত : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$, কারণ $\angle ADC = 90^0$

আবার $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$, কারণ $\angle BEC = 90^0$]

৫। ΔABC এর $AB = AC$ এবং AC কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AC = CD$ হয়। প্রমাণ কর যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$.

৬। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে যেকোনো বিন্দু P হলে প্রমাণ কর যে, $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AC^2 + 4PO^2$.

৭। ABC ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

[সংকেত : $BP = PQ = QC$; আবার ABQ ত্রিভুজের মধ্যমা AP

$AB^2 + AQ^2 = 2(BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$.

আবার APC ত্রিভুজের মধ্যমা AQ হওয়ায় $AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$]

৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে দেখাও যে,

$AB^2 - AP^2 = BP.\ PC$.

[সংকেত : BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন কর। তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং

$AP^2 = PD^2 + AD^2$.

$\therefore AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD) = (CD + PD)\ BP = PC.\ BP$.]

৯। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BE^2 - CE^2 = BC.DE$.

১০। কোনো ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

[সংকেত : উপঃ ২.৩ এর দ্রষ্টব্য দেখ এবং প্রথমে প্রমাণ কর যে,

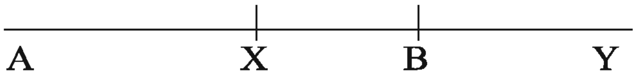
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$, যেখানে মধ্যমাত্রয় AD, BE এবং CF.

অতঃপর $AG = \frac{2}{3}AD$ বা, $4AD^2 = 9AG^2$ ইত্যাদি বসাও]

তৃতীয় অধ্যায়

অনুপাত ও সদৃশ ত্রিভুজ

৩.১। সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ



ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং একই অনুপাতে Y বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হয়েছে। তাহলে, $AX : XB = m : n$ এবং $AY : YB = m : n$

৩.২। অনুপাত ও সমানুপাত সংক্রান্ত কিছু ধর্ম

(i) $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$ হবে।

(ii) $a : x = b : x$ হলে, $a = b$ হবে।

(iii) $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ হবে। (ব্যস্তকরণ)

(iv) $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ হবে।

(v) $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ হবে। (আড়গুণন)

(vi) $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)

এবং $a - b : b = x - y : y$ হবে। (বিয়োজন)

(vii) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$................. হলে, $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} =$ ....

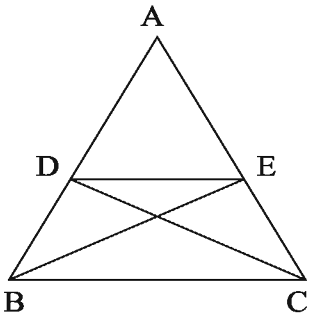
$$= \frac{a + b + c + \text{.................}}{x + y + z + \text{.................}}$$ হবে।

(viii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে । (যোজন ও বিয়োজন)

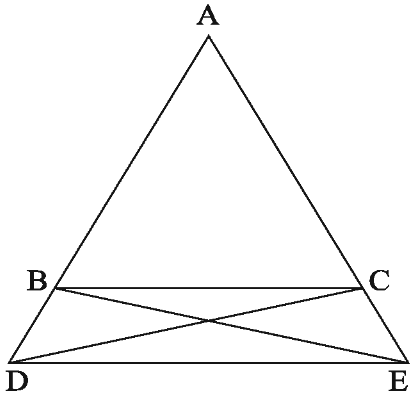
৩.৩। অনুপাত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য- ৩.১

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র–১



চিত্র–২

বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে (চিত্র-১) অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে (চিত্র-২) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD ঃ DB = AE ঃ EC.

অঙ্কন : B ও E এবং C ও D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBDE একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{AD}{DB}$$

আবার ΔADE এবং ΔDEC একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$$

কিন্তু $\Delta BDE = \Delta DEC$ (একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত)

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ অর্থাৎ AD ঃ DB = AE ঃ EC.

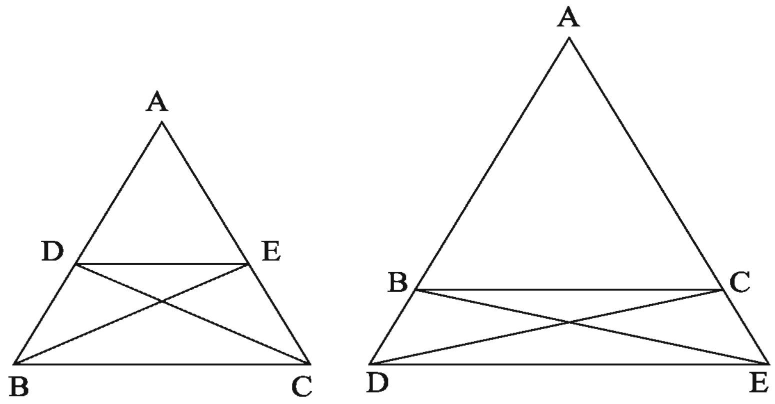
অনুসিদ্ধান্ত ১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং সমপাত বিন্দুতে মধ্যমাগুলি 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

উপপাদ্য- ৩.২

কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।



বিশেষ নির্বচন : DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ AD ঃ DB = AE ঃ EC

প্রমাণ করতে হবে যে, DE এবং BC সমান্তরাল।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ : $\frac{\Delta ADE}{\Delta DEB} = \frac{AD}{DB}$ (ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট)

এবং $\frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$ (ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট)

কিন্তু $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [স্বীকার]

$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta DEB} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$

$\therefore \Delta DEB = \Delta DEC$

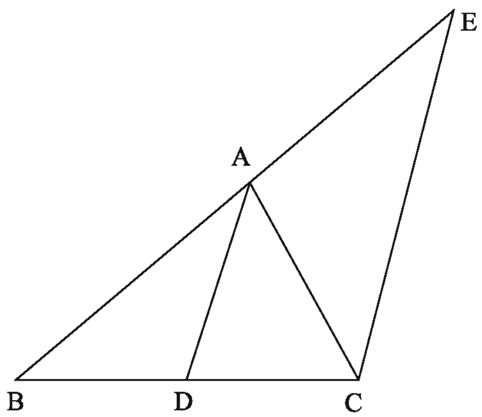
কিন্তু ΔDEB এবং ΔDEC একই ভূমি DE এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ BC ও DE সমান্তরাল।

উপপাদ্য- ৩.৩

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : যেহেতু DA ।। CE [অঙ্কন]

$\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

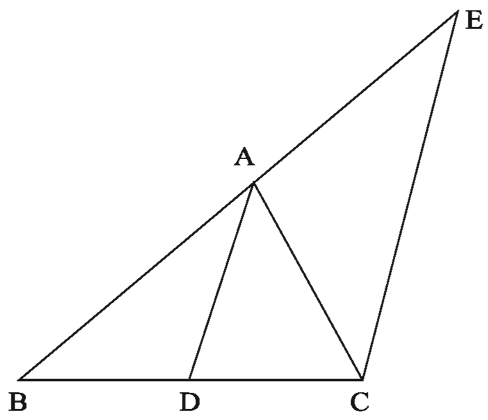
$\therefore \angle AEC = \angle ACE$ $\quad\quad \therefore AC = AE$

আবার, যেহেতু $DA \,||\, CE$ $\quad \therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \;(\because AE=AC)$$

উপপাদ্য-৩.৪

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীর্ষ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে অঙ্কিত AD সরলরেখাংশ BC বাহুকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ $\angle BAD = \angle CAD$.

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে এরূপ CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA বাহুর বর্ধিতাংশ E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔBCE এর $CE \,||\, DA$

$\therefore$ BA ঃ AE = BD ঃ DC

কিন্তু BD ঃ DC = BA ঃ AC (স্বীকার)

$\therefore$ BA ঃ AE = BA ঃ AC

$\therefore AE = AC$

অতএব $\angle ACE = \angle AEC$

কিন্তু $\angle AEC$ = অনুরূপ $\angle BAD$

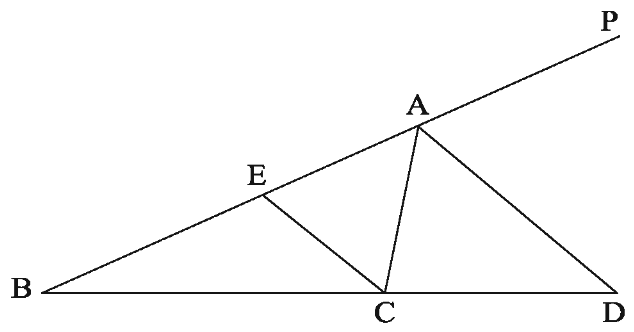
এবং $\angle ACE$ = একান্তর $\angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

উপপাদ্য- ৩.৫

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BA বাহুকে P পর্যন্ত বর্ধিত করে বহিঃস্থ $\angle CAP$ উৎপন্ন করা হয়েছে। $\angle CAP$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক AD রেখাংশ বর্ধিত BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = AB ঃ AC

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $EC \,||\, AD$

$\therefore \angle CEA =$ অনুরূপ $\angle DAP$

এবং $\angle ECA =$ একান্তর $\angle CAD$

কিন্তু $\angle CAD = \angle DAP$ [স্বীকার]

$\therefore \angle CEA = \angle ECA$

$\therefore AC = AE$

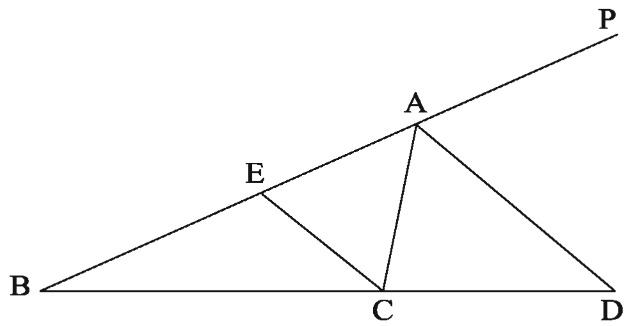
আবার যেহেতু $EC \,||\, AD$

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AE

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AC [$\therefore$ AE = AC]

উপপাদ্য- ৩.৬

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু ও বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখা উক্ত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহু D বিন্দুতে এরূপে বহির্বিভক্ত হয়েছে যে,

BD ঃ DC = BA ঃ AC

A, D যোগ করি এবং BA বাহুকে P পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle CAP$ উৎপন্ন হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক; অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle CAP$ এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ $\angle CAD = \angle DAP$.

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : যেহেতু $CE \,||\, DA$

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AE

কিন্তু BD ঃ DC = BA ঃ AC

$\therefore$ BA ঃ AE = BA ঃ AC

$\therefore AE = AC$

অতএব $\angle ACE = \angle AEC$

আবার $\angle AEC =$ অনুরূপ $\angle PAD$

এবং $\angle ACE =$ একান্তর $\angle CAD$

$\therefore \angle PAD = \angle CAD$

অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle CAP$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

অনুশীলনী-৩.১

১। কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

২। ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা AD এবং ADB ও ADC কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহুদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, EF || BC.

[সংকেত : ADB কোণের সমদ্বিখণ্ডক DE, $\therefore$ AE ঃ BE = AD ঃ BD

অনুরূপভাবে, AF ঃ CF = AD ঃ DC = AD ঃ BD কারণ, BD = CD

$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{AF}{CF}$ $\therefore$ EF || BC]

৩। প্রমাণ কর যে, কতকগুলো সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

৪। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

৫। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

৬। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = 6EF.

[সংকেত : ΔADE এর GF || DE $\therefore$ AG ঃ GD = AF ঃ EF

অর্থাৎ $\frac{2GD}{GD} = \frac{AF}{EF}$ $\qquad \therefore \frac{AF+EF}{EF} = \frac{2+1}{1}$

অর্থাৎ AE = 3EF $\qquad \therefore$ AC = 2AE = 6EF]

৭। উপপাদ্য-৩.১ এর অনুসিদ্ধান্ত-৩ প্রমাণ কর।

৮। ΔABC এর BC বাহুস্থ যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔAOB ঃ ΔAOC = BX ঃ XC

৯। ΔABC এর $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BE ঃ CF

১০। ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD এর সমদ্বিখণ্ডক BD কে P বিন্দুতে এবং CD কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AP ঃ PQ = DC ঃ DA.

১১। কোনো বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। AB = BC হলে, প্রমাণ কর যে, DA ঃ DC = AP ঃ PC

[সংকেত : $\angle$BAC = $\angle$ACB; আবার $\angle$BAC = $\angle$BDC একই চাপের উপরস্থ এবং

$\angle ACB = \angle ADB$, একই চাপের উপরস্থ। $\therefore \angle BDC = \angle ADB$

অর্থাৎ DP রেখাংশ $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{PA}{PC}$]

১২। ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে,

AM ঃ DN = AB ঃ DE.

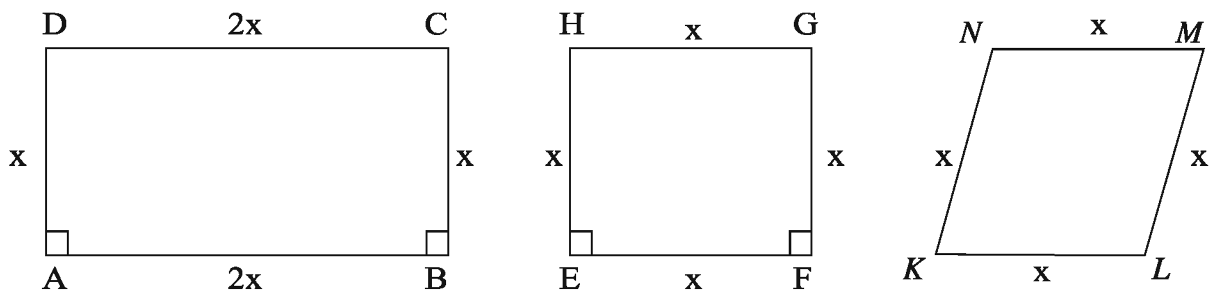
১৩। ABC এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, AC = 3AF এবং BF = 4EF.

৩.৪। সদৃশতা (Similarity)

সংজ্ঞা ঃ সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বহুভুজ বলা হয়।



উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, (i) ABCD আয়ত ও EFGH বর্গ সদৃশ নয় যদিও তারা সদৃশকোণী এবং (ii) EFGH বর্গ ও KLMN রম্বস সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান হয়। দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে যদি সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হয়, তবে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

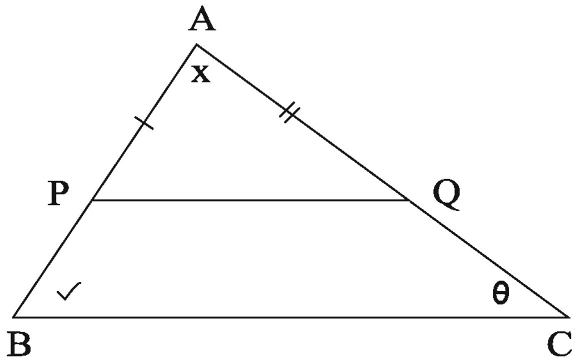
এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, (ক) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়।

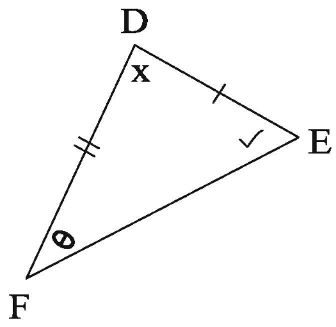
(খ) দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়।

(গ) উভয় ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন, ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB বাহু ও DE বাহু, AC বাহু ও DF বাহু, BC বাহু ও EF বাহু।

উপপাদ্য - ৩.৭

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।





বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDEF এর কোনো একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ হবে।

সুতরাং তখন $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ হবে। ফলে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ $(= 1)$ হবে।

অর্থাৎ, প্রমাণ সম্পূর্ণ হবে।

সুতরাং ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি।

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

এখন $\Delta APQ \cong \Delta DEF$, কারণ, $AP = DE$, $AQ = DF$ এবং $\angle A = \angle D$

সুতরাং $\angle APQ = \angle DEF = \angle ABC$ এবং $\angle AQP = \angle DFE = \angle ACB$.

অর্থাৎ PQ রেখাংশ ও BC বাহুকে AB বাহু ও AC রেখা ছেদ করায় অনুরূপ কোণযুগল সমান হয়েছে।

সুতরাং $PQ \,||\, BC$ $\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$ বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

একইভাবে BA বাহু ও BC বাহু থেকে যথাক্রমে ED রেখাংশ ও EF রেখাংশের সমান রেখাংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায় যে,

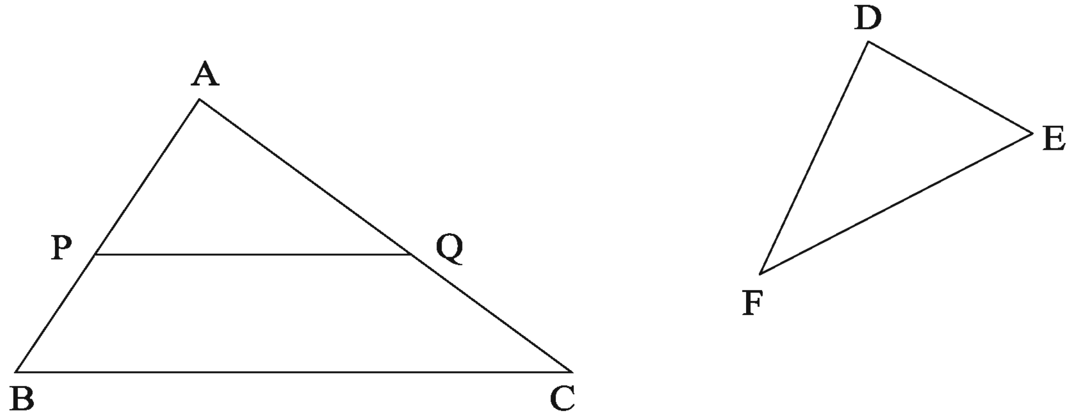
$\frac{BA}{ED} = \frac{BC}{DE}$ অর্থাৎ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ $\quad\quad \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তারা সদৃশ হয়।

মন্তব্য : দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি কোণ অপরটির দুইটি কোণের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং তার ফলে সদৃশ হয়। কেননা প্রত্যেকটি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

উপপাদ্য - ৩.৮

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF এর $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$.

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDEF এর কোনো একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগলই সমান হবে এবং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে। সুতরাং তখন অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে। অর্থাৎ, প্রমাণ সম্পূর্ণ হবে। সুতরাং ΔABC ও ΔDEF এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি।

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC রশ্মিতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

এখন, যেহেতু $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$.

সুতরাং $PQ \,||\, BC$

$\therefore \quad \angle ABC = \angle APQ$ [AB ছেদক রেখা দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACB = \angle AQP$ [AC ছেদক রেখা দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

ΔABC ও ΔAPQ সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{PQ}$.

$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{PQ}$ [কল্পনানুসারে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$]

$\therefore$ EF = PQ

সুতরাং $\Delta APQ \cong \Delta DEF$ [একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান বলে]

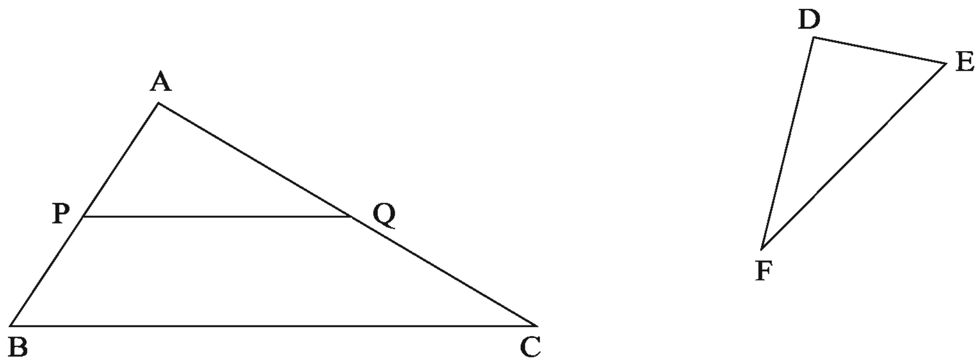
$\therefore \angle PAQ = \angle EDF, \angle APQ = \angle DEF, \angle AQP = \angle DFE$

অর্থাৎ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

[$\because \angle APQ = \angle ABC$, এবং $\angle AQP = \angle ACB$]

উপপাদ্য- ৩.৯

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এবং ΔDEF এমন যে,

$\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এবং ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : যদি AB = DE হয়, তবে AC = DF হবে। (কারণ, কল্পনানুসারে, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$)। ফলে, ΔABC এর দুই বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ΔDEF এর দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হবে।

সুতরাং তখন $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ হবে। অতএব, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হবে।

এখন, মনে করি, $AB \neq DE$। তাহলে, $AC \neq DF$

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন AP = DE এবং AQ = DF হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, কারণ AP = DE, AQ = DF এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$।

$\angle A = \angle D, \angle APQ = \angle E, \angle AQP = \angle F.$

আবার, যেহেতু $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$

$\therefore PQ \,||\, BC$

সুতরাং $\angle ABC = \angle APQ$ এবং $\angle ACB = \angle AQP$

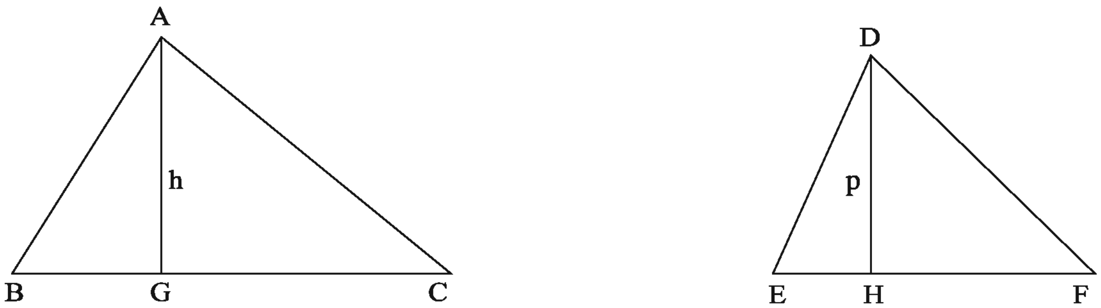
$\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

সুতরাং ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

উপপাদ্য - ৩.১০

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু BC ও EF.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$

অঙ্কন : BC ও EF এর ওপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব আঁকি এবং মনে করি, $AG = h$ এবং $DH = p$.

প্রমাণ : $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ BC.h$ এবং $\Delta DEF = \frac{1}{2} EF.p$

$$\therefore\ \frac{ABC}{DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.h}{\frac{1}{2}EF.p} = \frac{h.BC}{p.EF}$$

কিন্তু ABG এবং DEH ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B = \angle E$, $\angle AGB = \angle DHE$ (= এক সমকোণ)

$\therefore$ ΔABG ও ΔDEH সদৃশকোণী এবং তাই সদৃশ।

$\therefore \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (কারণ ABC ও DEF সদৃশ)

$$\therefore\ \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{h.BC}{p.EF} = \frac{BC}{EF}.\ \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

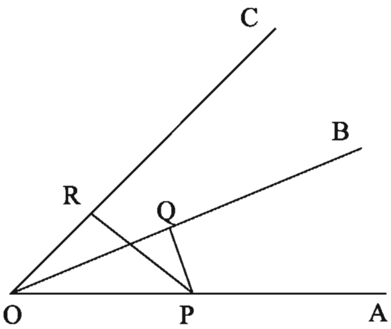
অনুশীলনী-৩.২

১। প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি অপর একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

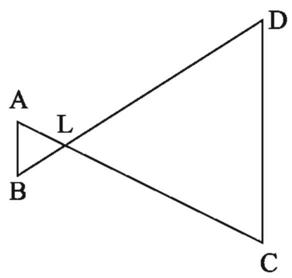
২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

৩। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

৪। পাশের চিত্রে, OA রশ্মিতে P বিন্দু থেকে OB ও OC রশ্মির ওপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব। দেখাও যে, $\frac{PQ}{PR}$ অনুপাতের মান OA রশ্মিতে P এর সকল অবস্থানের জন্য একই থাকে।



৫। পাশের চিত্রে, $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$.
প্রমাণ কর যে, $BD = 5BL$.

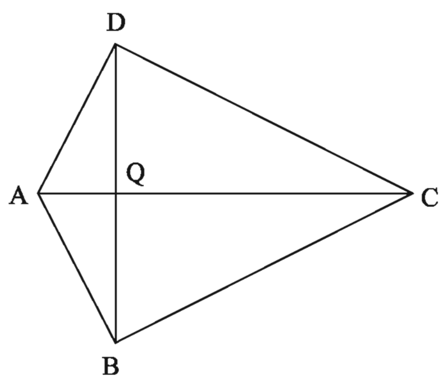


৬। ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC রেখাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM.DN একটি ধ্রুবক।

৭। পাশের চিত্রে, $DB \perp AC$ এবং

$$DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC.$$

প্রমাণ কর যে, $DA \perp DC$.

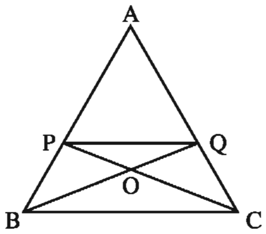


৮। ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$
প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$.

ত্রিভুজ সম্পর্কিত

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

নিম্নের চিত্রের আলোকে (১ , ২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে PQ||BC

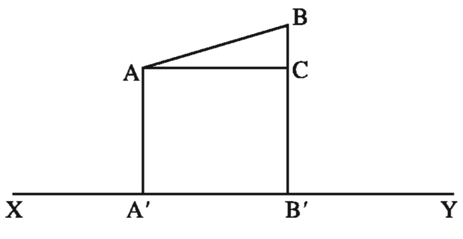
১। নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. AP ঃ AQ = PB ঃ QC
খ. AP ঃ AC = AQ ঃ QC
গ. AQ ঃ AB = BO ঃ OQ
ঘ. AB ঃ AP = PQ ঃ BC

২। PBCQ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. PO ঃ OC = BO ঃ OQ
খ. PO ঃ OC = QO ঃ OB
গ. PO ঃ OB = OC ঃ OQ
ঘ. PO ঃ BO = QO ঃ OC

৩।



চিত্রে XY এর ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

ক. AC   খ. A′B′
গ. BC   ঘ. XY

৪। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

i. $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$

ii. $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$

iii. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $AB^2 \neq BC^2 + CA^2$

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i
খ. ii
গ. i ও ii
ঘ. ii ও iii

৫। ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে

i. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

ii. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

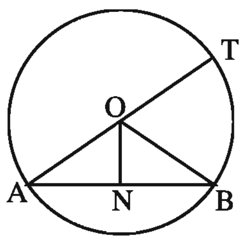
iii. Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র DEF

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii
খ. i ও iii
গ. ii ও iii
ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।

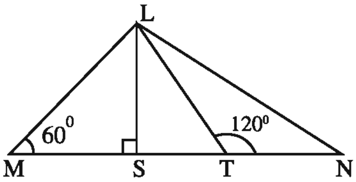


চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে, $ON \perp AB$

ক. AT = 10 সে.মি., AB = 8 সে.মি. হলে ON এর মান নির্ণয় কর।

খ. AB এর ওপর OB এর লম্ব অভিক্ষেপটি লিখ এবং এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2AB.BN$.

গ. AB এর ওপর N ভিন্ন অপর কোনো বিন্দু P হলে দেখাও যে, $OA^2 > AP.PB$.

২। 

ক. চিত্রে LMT কোন ধরনের ত্রিভুজ এবং কেন?

খ. ΔLMN এ T, MN বাহুর মধ্যবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $LM^2+LN^2 = 2(LT^2+MT^2)$

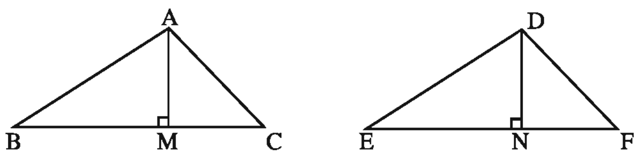
গ. ΔLMN এ MT এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ LM ও LT যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $MQ^2 - TQ^2 = MT.PQ$

৩। ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BP ঃ CQ.

৪। 

চিত্রে ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

ক. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

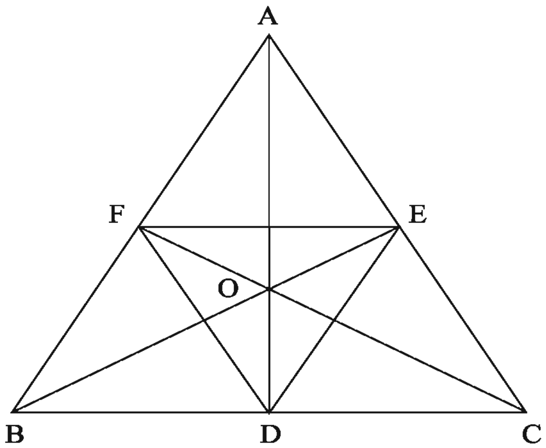
গ. যদি BC = 3 সে.মি., EF = 6 সে.মি., $\angle B = 60^0$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং $\Delta ABC = 3$ বর্গ সে.মি. হয়, তবে ΔDEF অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

ত্রিভুজ ও বৃত্তবিষয়ক কতিপয় প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য - ৪.১

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব তার পাদত্রিভুজের কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর অঙ্কিত AD, BE, CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

D ও E; E ও F এবং F, D যোগ করি। তাহলে DEF ত্রিভুজটিই ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE, CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ এবং $\angle EFD$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : OECD চতুর্ভুজে $\angle ODC$ + উহার বিপরীত $\angle OEC$ = ২ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C, E বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OE চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ODE = \angle OCE$.

আবার, OFBD চতুর্ভুজে $\angle ODB$ + উহার বিপরীত $\angle OFB$ = ২ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B, F বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OF চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ODF = \angle OBF$

ΔABE ও ΔACF থেকে $\angle OBF$ ও $\angle OCE$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক কোণ।

$\therefore \angle OCE = \angle OBF$

$\therefore \angle ODE = \angle OCE = \angle OBF = \angle ODF$

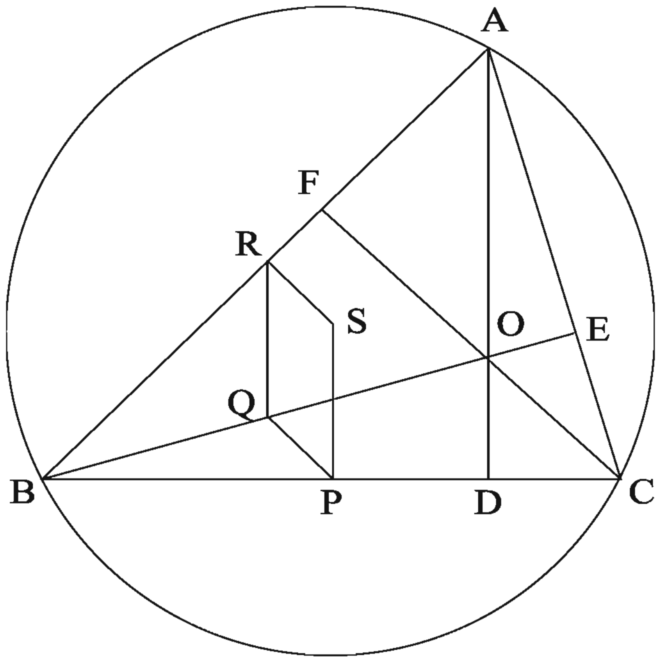
$\therefore$ AD সরলরেখাংশ $\angle FDE$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত উপপাদ্য থেকে প্রতীয়মান হয় যে, DEF পাদত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয়। তাই O বিন্দুটি পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। সুতরাং সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দুই পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

উপপাদ্য- ৪.২

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং S থেকে BC বাহুর ওপর লম্ব দূরত্ব SP.

প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে A এর দূরত্ব, S থেকে BC এর দূরত্বের দ্বিগুণ, অর্থাৎ $OA = 2SP$.

অঙ্কন : OB এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q এবং R নিই এবং P, Q; Q, R ও R, S যোগ করি।

প্রমাণ : ΔBOC এর BC ও BO বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q,

$\therefore$ $PQ \parallel CO$ অর্থাৎ $PQ \parallel CF$.

আবার, যেহেতু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু R,

$\therefore$ SR রেখা AB এর ওপর লম্ব। $\therefore$ $SR \parallel CF$ $\therefore PQ \parallel SR$

ΔAOB এর AB ও BO বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও Q

$\therefore RQ \parallel AO$ এবং $RQ = \frac{1}{2}AO$.

আবার, SP রেখাংশ BC এর ওপর লম্ব। $\therefore$ $SP \parallel AD$ অর্থাৎ $SP \parallel OA$

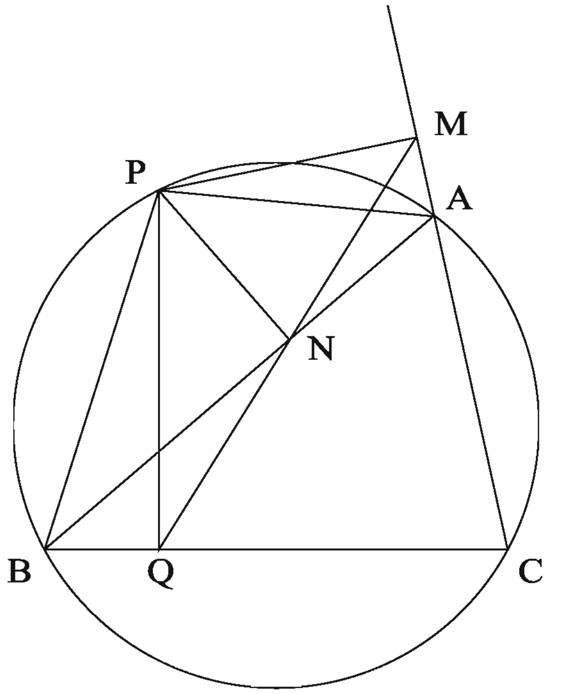
$\therefore$ $SP \parallel OA \parallel RQ$

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $SP =$ বিপরীত $RQ = \frac{1}{2}OA$. অর্থাৎ $OA = 2SP$.

উপপাদ্য - ৪.৩

ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ **যেকোনো** বিন্দু থেকে ঐ ত্রিভুজের বাহুরেখাত্রয়ের **ওপর** অঙ্কিত লম্ব তিনটির পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু থেকে BC ও AB বাহুদ্বয়ের ওপর যথাক্রমে PQ এবং PN লম্ব ও বর্ধিত CA এর ওপর PM লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, Q, M, N সমরেখ।

অঙ্কন : Q, N ও N, M যোগ করি এবং P, A ও P, B যোগ করি। এটাই প্রমাণ করলে যথেষ্ট হবে যে, QN, NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle PQB = \angle PNB$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ PNQB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। আবার, $\angle PNA + \angle PMA$ = ২ সমকোণ (প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ PNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। $\therefore$ PM চাপের উপর $\angle PAM = \angle PNM$

আবার PNQB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ থেকে,

$\angle PNQ = 180^0 - \angle PBQ = \angle PAC$ (কারণ P, A, C, B সমবৃত্ত)

$= 180^0 - \angle PAM = 180^0 - \angle PNM$

$\therefore \angle PNQ + \angle PNM = 180^0$

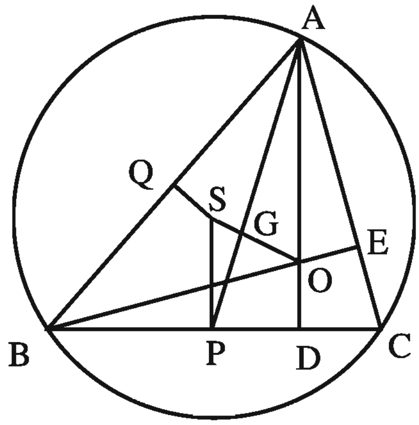
$\therefore$ QN ও NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য : P বিন্দুর অবস্থানভেদে ত্রিভুজের CA বাহুরেখার স্থলে AB বা BC বাহুরেখা বর্ধিত করা প্রয়োজন হতে পারে এবং সেরূপ অবস্থায় পাদরেখারও অবস্থান পরিবর্তন হতে পারে।

দ্রষ্টব্য : ABC ত্রিভুজ সম্পর্কে QNM সরলরেখাকে P বিন্দুর পাদরেখা (Pedal line) বা সিমসন রেখা (Simson line) বা ওয়ালেস রেখা (Wallace line) বলা হয়।

উপপাদ্য- ৪.৪

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। A, P যোগ করি, তাহলে AP, ΔABC এর একটি মধ্যমা, S, O যোগ করি, মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে, তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore$ ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.
$\therefore OA = 2SP$ ... ... (i)
এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$
$AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক বলে, $\angle PAD = \angle SPA$; [একান্তর কোণ বলে]
অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$
এখন ΔAGO ও ΔPGS এর মধ্যে $\angle AGO = \angle PGS$; [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
এবং $\angle OAG = \angle SPG$; [একান্তর কোণ বলে]
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$
$\therefore$ ΔAGO ও ΔPGS সদৃশকোণী।
$\therefore \dfrac{AG}{GP} = \dfrac{AO}{SP}$
বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$
বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2SP}{SP}$; [(i) নং হতে মান বসিয়ে]
বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{1}$
$\therefore AG : GP = 2 : 1$
অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। [প্রমাণিত]

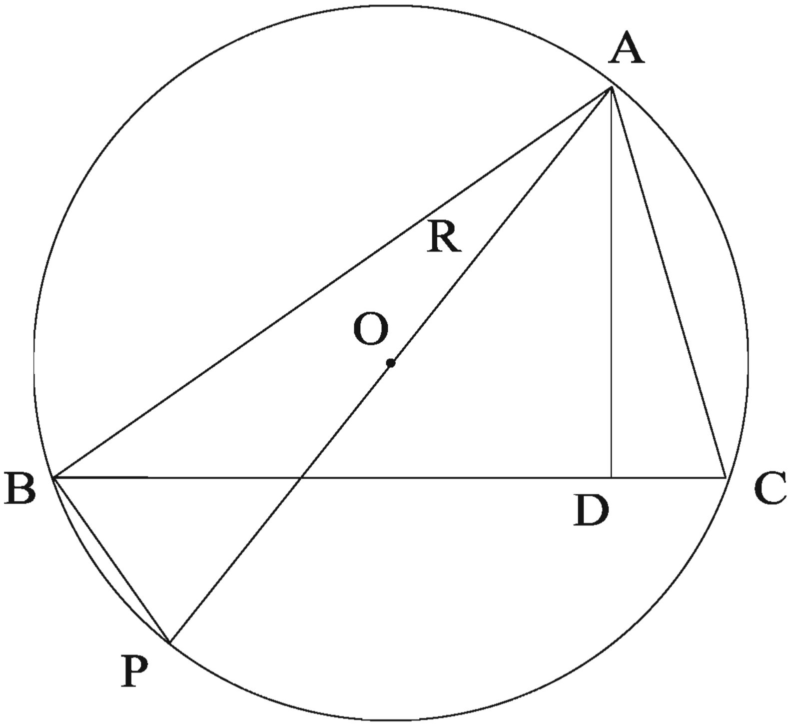
দ্রষ্টব্য ১। নববিন্দুবৃত্ত (Nine point circle) : কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলো মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বসমেত এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলা হয়।

২। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন সসীম সরলরেখার মধ্যবিন্দুই তার নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র।

৩। নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

উপপাদ্য - ৪.৫

কোনো ত্রিভুজের **যেকোনো** দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির **ওপর** অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজে BC এর ওপর AD লম্ব এবং AP ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB.AC = AP.AD$

অঙ্কন : B, P যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABP ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle APB = \angle ACD$ (একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ)

$\angle ABP =$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $=$ এক সমকোণ $= \angle ADC.$

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP =$ অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore$ ΔABP এবং ΔADC সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$$

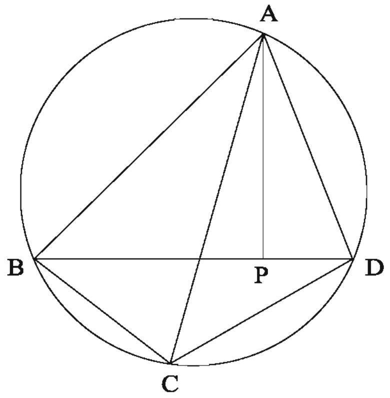
$\therefore$ $AB.AC = AP.AD.$

মন্তব্য : ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, $R = \frac{1}{2}AP.$

সুতরাং উপরিউক্ত উপপাদ্য থেকে $AB.AC = 2R.AD$

উপপাদ্য - ৪.৬

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান (টলেমির উপপাদ্য)।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ এর চেয়ে ছোট ধরে নিয়ে, A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন]

প্রত্যেকের সাথে $\angle PAC$ যোগ করলে

$\angle BAC + \angle PAC = \angle PAD + \angle PAC$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$

এখন ΔABD এবং Δ ACD এর মধ্যে $\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore$ ΔABP এবং ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ অর্থাৎ $AC.BP = AB.CD$ ....(1)

আবার Δ ABC এবং Δ APD এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC = \angle APD$

$\therefore$ ΔABC এবং ΔAPD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$ অর্থাৎ $AC.PD = AD.BC$ ....(2)

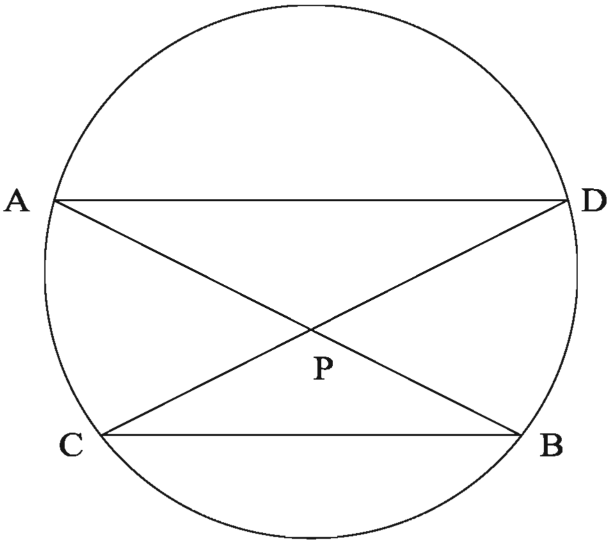
(1) ও (2) যোগ করে,

$AB.CD + BC.AD = AC.BP + AC.PD = AC(BP + PD) = AC.BD$

অর্থাৎ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

উপপাদ্য - ৪.৭

কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ **কোনো** বিন্দুতে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD.

অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।

প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle A = \angle C$ (একই চাপ BD এর উপর অবস্থিত কোণ)

$\angle D = \angle B$ (একই চাপ AC এর উপর অবস্থিত কোণ)

এবং $\angle APD$ = বিপ্রতীপ $\angle BPC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB}$$

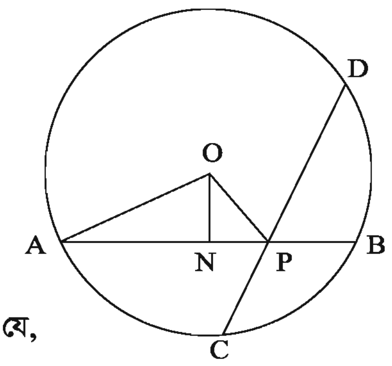
$\therefore$ AP.PB = CP.PD.

বিকল্প :

বিশেষ নির্বচন : একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ঐ বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CB বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD

অঙ্কন : বৃত্তের কেন্দ্র থেকে AB এর উপর ON লম্ব অঙ্কন করি। O, A এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু AB এর উপর ON লম্ব, $\therefore$ AN = NB



$\therefore$ $AP.PB = (AN + NP)(NB - NP)$

$= (AN + NP)(AN - NP)$ [$\therefore AN = NB$]

$= AN^2 - NP^2$

$= AN^2 + ON^2 - ON^2 - NP^2$

$= (AN^2 + ON^2) - (NP^2 + ON^2)$

$= OA^2 - OP^2 = r^2 - OP^2$ [r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ]।

অনুরূপভাবে, O থেকে CD এর ওপর লম্ব এঁকে প্রমাণ করা যায় যে,

$CP.PD = r^2 - OP^2$

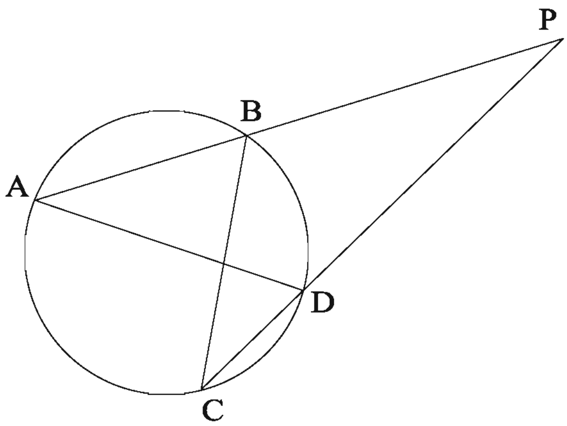
$\therefore AP.PB = CP.PD.$

উপপাদ্য - ৪.৮

কোনো বৃত্তের দুইটি বর্ধিত জ্যা যদি বৃত্তের বহিঃস্থ **কোনো** বিন্দুতে ছেদ করে, তবে একটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

বিশেষ নির্বচন : একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD কে বর্ধিত করায় তারা বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AP.PB = CP.PD.$

অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।



প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle A = \angle C$ (একই চাপ BD-এর উপর অবস্থিত কোণ)

$\angle P$ সাধারণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle PBC$ = অবশিষ্ট $\angle PDA$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক

অর্থাৎ $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{PD}{PB}$

$\therefore AP.PB = CP.PD.$

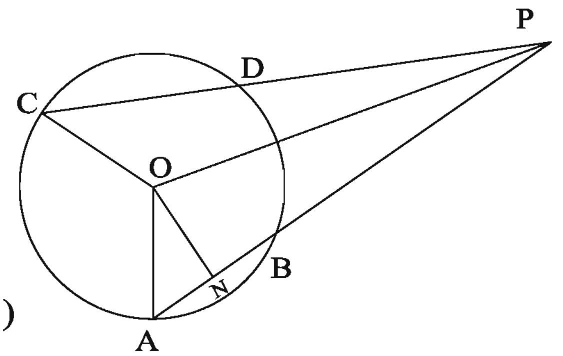
বিকল্প :

বিশেষ নির্বচন : O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD ঐ বৃত্তের দুটি জ্যা, যারা বৃত্তের বাইরে একটি বিন্দু P-তে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AP.PB = CP.PD$

অঙ্কন : বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB এর উপর ON লম্ব টানি এবং O A, O P ও O C যোগ করি।

প্রমাণ : O বৃত্তের কেন্দ্র, AB একটি জ্যা ও $ON \perp AB$

$\therefore AN = BN$ .... (1)



এখন, যেহেতু $AP.PB = (AN + NP)(NP - BN)$
$= (NP + AN)(NP - AN)$ [(1) থেকে]।
$= NP^2 - AN^2$
$= NP^2 + ON^2 - ON^2 - AN^2$
$= (NP^2 + ON^2) - (AN^2 + ON^2)$
$= OP^2 - OA^2$.................... (2)
এবং অনুরূপে $CP.PD = OP^2 - OC^2$
$= OP^2 - OA^2$ ....(3)
$\because$ $OA = OC$, কারণ উহারা একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।
$\therefore$ (2) ও (3) এর ডান পক্ষদ্বয় সমান।
$\therefore$ উহাদের বাম পক্ষদ্বয় সমান হবে।
অর্থাৎ $AP.PB = CP.PD$.

অনুশীলনী-৪

১। প্রমাণ কর যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু তার পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

২। প্রমাণ কর যে, পাদত্রিভুজের কোনো দুই বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর সাথে মিলিত হয় তার সাথে উক্ত বাহুদ্বয় সমান কোণ উৎপন্ন করে।
[সংকেত : মনে কর, ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ DEF এবং লম্ববিন্দু O,
তাহলে $\angle EDC = \angle ODE$ এর পূরক $= \angle OCE$ এর পূরক $= \angle BAC$.
কারণ OCE এবং ODE একই বৃত্তাংশস্থ কোণ। অনুরূপভাবে, $\angle FDB = \angle BAC$.
$\therefore$ $\angle EDC = \angle FDB$ ইত্যাদি।]

৩। প্রমাণ কর যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ অঙ্কন করলে অপর যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় উহা ও মূল ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।

৪। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $PO \perp AB$.
[সংকেত : যেহেতু P থেকে বাহুত্রয়ের ওপর লম্বের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ, সুতরাং DE রেখাংশ P থেকে AB এর ওপর লম্বের পাদবিন্দুগামী। দুইটি সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।
$\therefore$ O বিন্দু P থেকে AB এর ওপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।]

৫। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$.

৬। ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলির ওপর লম্ব AD.BE.CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO.OD = BO.OE = CO.OF$.
[সংকেত : ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ। $\therefore$ $BO : CO = OF : OE$.
$\therefore$ $BO.OE = CO.OF$ ইত্যাদি]

৭। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$

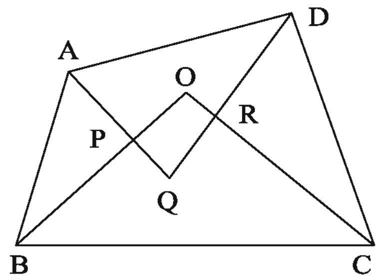
৮। কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত একটি সরলরেখাংশ বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তের একটি ব্যাস AB এর উপর PM লম্ব। প্রমাণ কর যে,
$PM^2 = PC.PD + AM.MB.$

৯। কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে যদি ঐ বৃত্তে একটি স্পর্শক PT ও একটি ছেদক PBA অঙ্কন করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $PT^2 = PA.PB.$

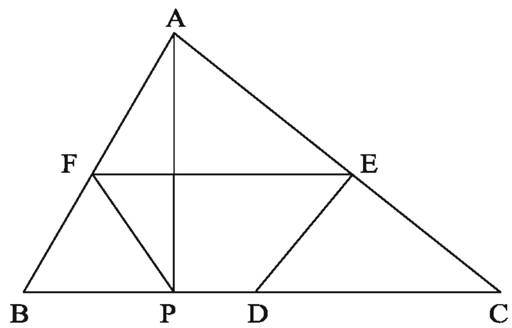
১০। প্রমাণ কর যে, দুইট পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা–এর বর্ধিতাংশস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

১১। দুইটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও $A'B'$ বৃত্তে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। d ও d' যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাস হলে প্রমাণ কর যে, $AB : A'B' = d : d'$

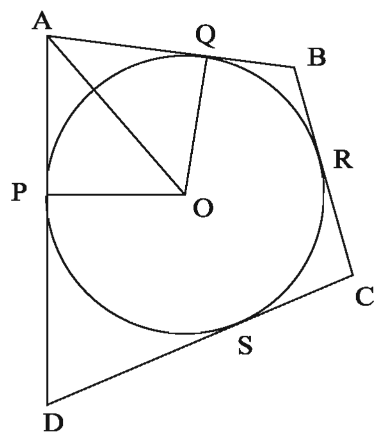
[সংকেত : কেন্দ্রস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OC রেখাংশ AB এর উপর লম্ব হবে।
ACO এবং $A'C'O'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ প্রমাণ কর। পরে AOB এবং $A'O'B'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ প্রমাণ কর।
তাহলে $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AO}{A'O'} = \dfrac{2AO}{2A'O'} = \dfrac{d}{d'}$



১২। প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলোর ছেদনে উৎপন্ন OPQR চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হবে।

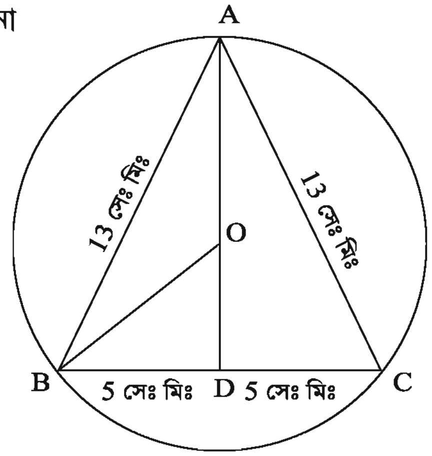


১৩। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F এবং BC এর ওপর AP লম্ব। দেখাও যে, PDEF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।



১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD হলে প্রমাণ কর যে, AD + BC = AB + CD.

১৫। পরিলিখিত ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য চিত্রে দেখানো হয়েছে। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।



১৬। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে. মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৭। দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করেছে। APQ জ্যা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AP ও AQ এবং ব্যাসার্ধদ্বয় সমানুপাতিক।

১৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে $AB^2 = 2R.AD$.

১৯। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

২০। C কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি অপর দুই সমান্তরাল স্পর্শককে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $PQ.PR = CP^2$.

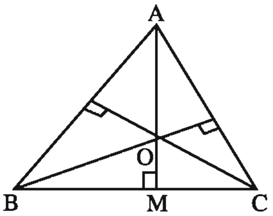
২১। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শকসমূহ তাদের কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে বিভক্ত করে।

২২। O কেন্দ্রিক কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে ঐ বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক। দেখাও যে, $\Delta PAB : \Delta AOB = PA^2 : OA^2$.

২৩। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব।
দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

নিচের চিত্রের আলোকে ১নং ও ২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১। O বিন্দুটিকে ΔABC এর কী বলে ?

ক. অন্তঃকেন্দ্র খ. ভরকেন্দ্র

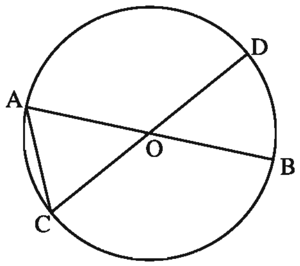
গ. লম্ববিন্দু ঘ. পরিকেন্দ্র

২। ΔABC এর ক্ষেত্রে গঠিত পাদত্রিভুজ কোনটি?

ক. ΔAEF খ. ΔBDF

গ. ΔDEF ঘ. ΔCDE

৩।

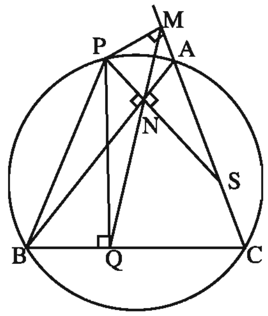


ওপরের চিত্রের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $AC.BD = AO.OB$ খ. $AO.AC = BD.DO$

গ. $AB.BO = CD.DO$ ঘ. $AO.BD = AC.OD$

চিত্রের আলোকে নিম্নের (৪-৬) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :



৪। চিত্রে পাদরেখা কোনটি?

ক. ANB　　খ. QNM

গ. BQC　　ঘ. CAM

৫। নিচের কোনটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ?

ক. PBQN　　খ. ACQN

গ. QNSC　　ঘ. PQCS

৬। চিত্রে কয়টি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আছে?

ক. 1 টি　　খ. 2 টি

গ. 3 টি　　ঘ. 4 টি

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি বৃত্তের PQRS একটি অন্তলিখিত চতুর্ভুজ। PR এবং QR এর দুইটি কর্ণ এবং $\angle QPR = \angle SPT$ যেখানে PT রেখাংশ QS কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. বর্ণনামতে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, $PR.QS - QR.PS = PQ.RS$

গ. বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁক যা বর্ধিত QS কে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং প্রমাণ কর যে, $AP^2=AQ.AS$

২। $\angle ABC$ এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব।

ক. চিত্র এঁকে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের নাম লিখ।

খ. PQ ও BN-এর ছেদ বিন্দু O হলে, প্রমাণ কর যে, $PO.OQ = BO.ON$

গ. প্রমাণ কর যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ।

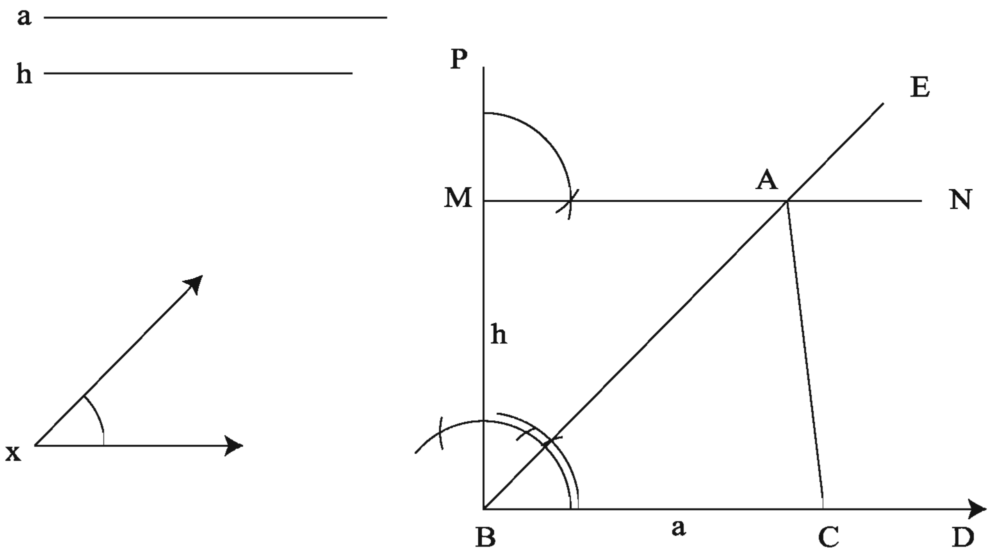
পঞ্চম অধ্যায়

বিবিধ জ্যামিতিক অঙ্কন

৫.১। বিবিধ ত্রিভুজ অঙ্কন

সম্পাদ্য-১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



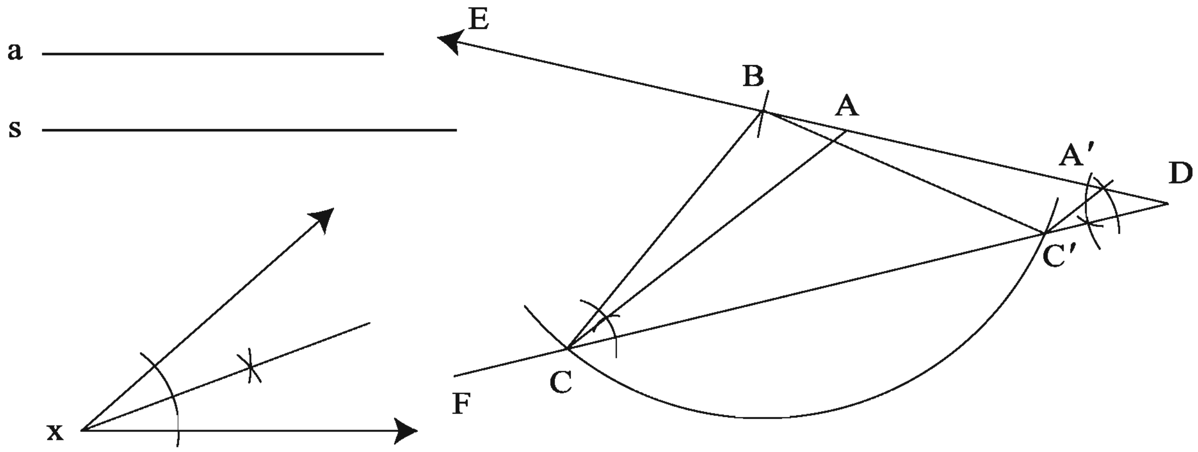
মনে করি, ভূমি a, উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।
অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a$ অংশ কেটে নিই। B বিন্দুতে BC এর উপর লম্ব BP অঙ্কন করি এবং BP থেকে $BM = h$ অংশ কেটে নিই। M বিন্দুতে BC এর সমান্তরাল MN রেখাংশ অঙ্কন করি। আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $MN \mid\mid BC$ (অঙ্কনানুসারে)
$\therefore$ ABC এর উচ্চতা $BM = h$
আবার $BC = a$ এবং $\angle ABC = \angle x$
$\therefore$ ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বিশ্লেষণ : যেহেতু ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দেয়া আছে, সুতরাং একটি সরলরেখা থেকে ভূমির সমান অংশ কেটে নিয়ে তার একপ্রান্তে প্রদত্ত কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে। অতঃপর ভূমির সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে আনত এমন রেখাস্থ বিন্দু নির্ণয় করতে হবে ভূমি থেকে যার উচ্চতা ত্রিভুজের উচ্চতার সমান হবে।

সম্পাদ্য-২

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি DE থেকে $DB = s$ অংশ কেটে নিই। DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle x$ অঙ্কন করি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DCA$ এবং C′ বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি। CA ও C′A′ রেখাদ্বয় BD কে যথাক্রমে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও A′BC′ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle ACD = \angle ADC = \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore\ \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

$\angle BA'C' = \angle A'DC' + \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

এবং $AC = AD$, $A'C' = A'D$

ABC ত্রিভুজে $\angle BAC = \angle x$, $BC = a$ এবং $CA + AB = DA + AB = DB = s$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

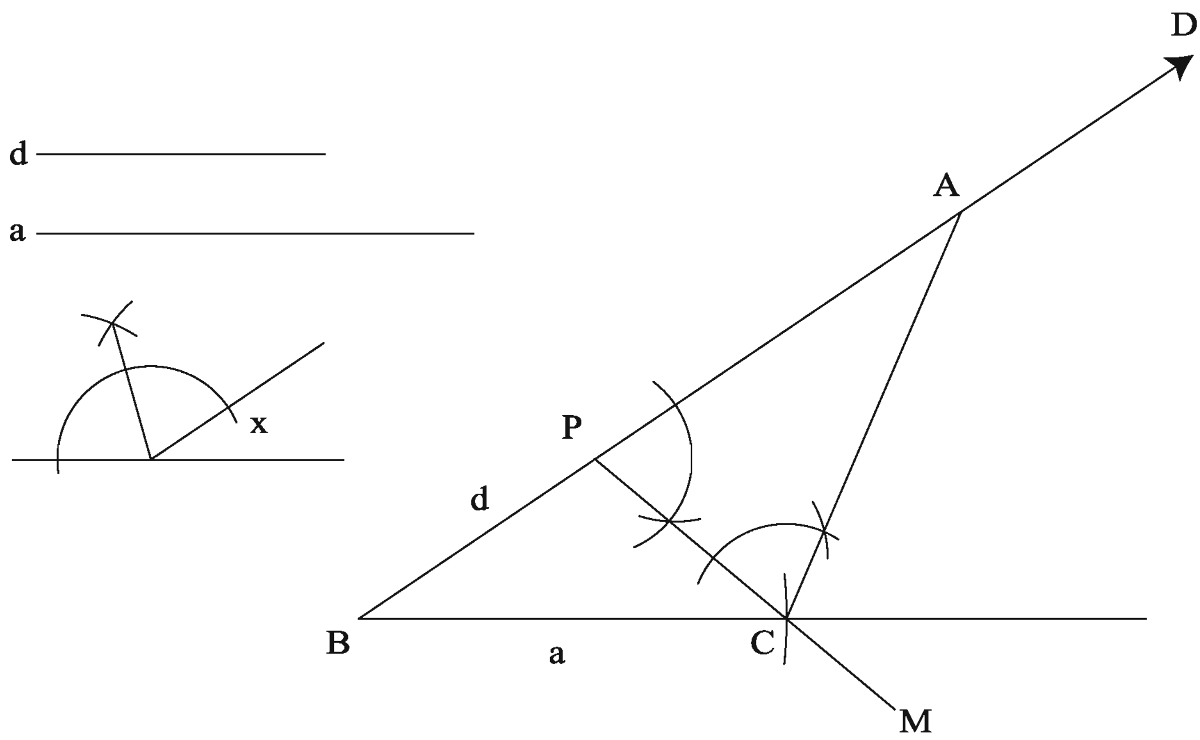
আবার A′BC′ ত্রিভুজ $\angle BA'C' = \angle x$, $BC' = a$

এবং $C'A' + A'B = DA' + A'B = DB = s$

$\Delta A'BC'$ অপর একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য-৩

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ভূমি a, অপর দুই বাহুর অন্তর d এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে BP = d অংশ কেটে নিই। P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুকে ছেদ করে। B,C যোগ করি। আবার C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : $\angle APC = \angle ACP \quad \therefore AP = AC$

$\therefore AB - AC = AB - AP = BP = d$

আবার $\angle APC = \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক।

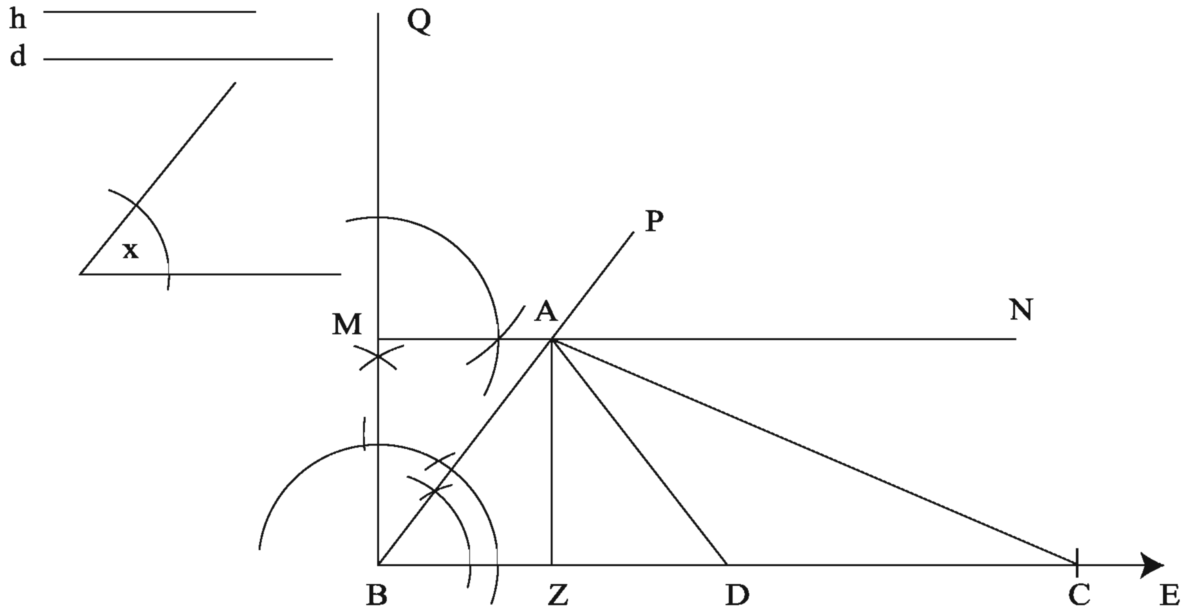
$\therefore \angle APC + \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক = বহিঃস্থ $\angle CAD = \angle CAB$ এর সম্পূরক।

$\therefore \angle A = \angle CAB = \angle x$

$\therefore$ ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য - ৪

ত্রিভুজের উচ্চতা, ভূমির উপর মধ্যমা এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির উপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো BE রশ্মির রেখার B বিন্দু $\angle x$ এর সমান করে $\angle EBP$ অঙ্কন করি। আবার B বিন্দুতে BE রেখার উপর BQ লম্ব অঙ্কন করি। BQ থেকে ত্রিভুজের উচ্চতা h এর সমান BM অংশ কেটে নিই। M বিন্দুতে BE এর সমান্তরাল করে MN রেখা অঙ্কন করি যা BP কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ বৃত্তচাপ BE কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BE থেকে $BD = DC$ অংশ কেটে নিই। A, C যোগ করি। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : A, D যোগ করি এবং A থেকে BC এর উপর AZ লম্ব অঙ্কন করি।

এখানে, MN ও BE সমান্তরাল এবং MB ও AZ উভয়েই BE এর উপর লম্ব।

$\therefore MB = AZ = h =$ উচ্চতা

$BD = DC \quad \therefore D$ বিন্দুই BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \ AD = d =$ ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা, অর্থাৎ BC ভূমি।

আবার $\angle ABC = \angle x =$ ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ।

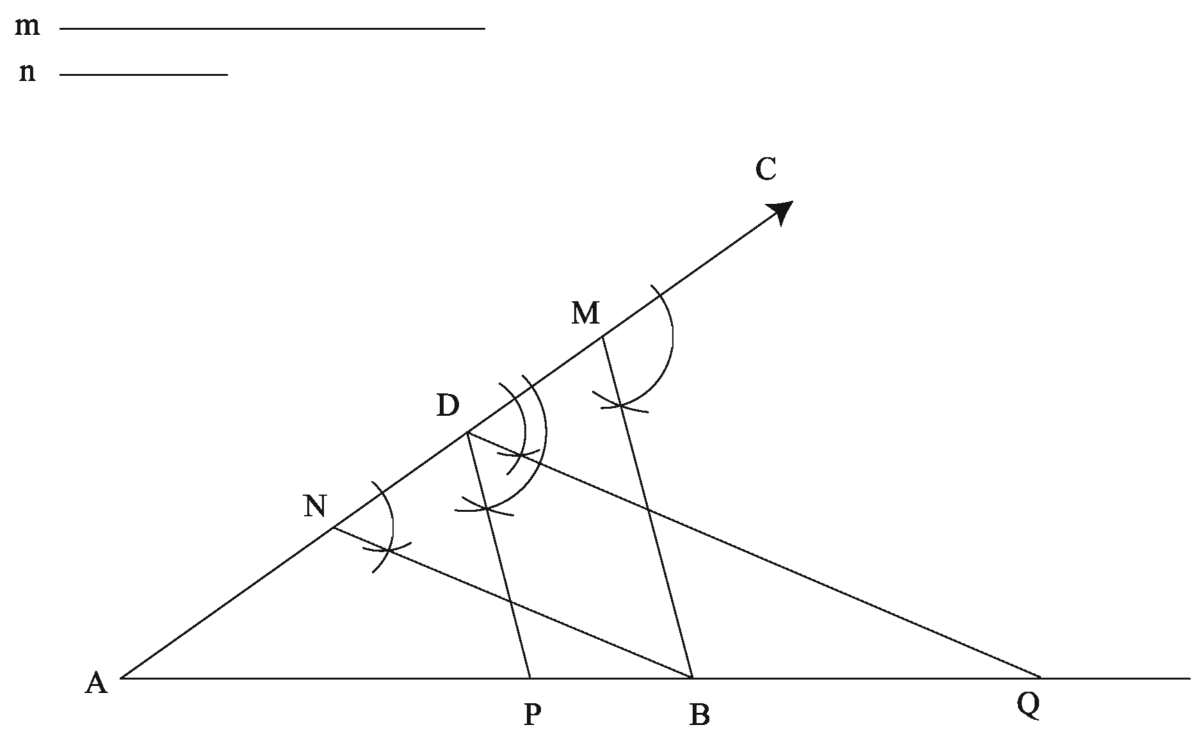
$\therefore \ ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : $\angle x$ এর উপর নির্ভর করে অনেক ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে।

৫.২। অনুপাত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য - ৫

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করতে হবে।



মনে করি, AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করতে হবে। অবশ্যই $m > n$ হতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ ঃ A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAC$ অঙ্কন করি এবং AC রশ্মি থেকে $AD = m$ অংশ কেটে নিই। DC এবং DA থেকে $DM = DN = n$ অংশ কেটে নিই। M, B ও B, N যোগ করি। D বিন্দুতে MB এবং NB এর সমান্তরাল যথাক্রমে DP এবং DQ রেখাংশদ্বয় অঙ্কন করি যেন তারা যথাক্রমে AB কে P বিন্দুতে এবং বর্ধিত AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ P ও Q বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু PD রেখাংশ ABM ত্রিভুজের এক বাহু BM এর সমান্তরাল,

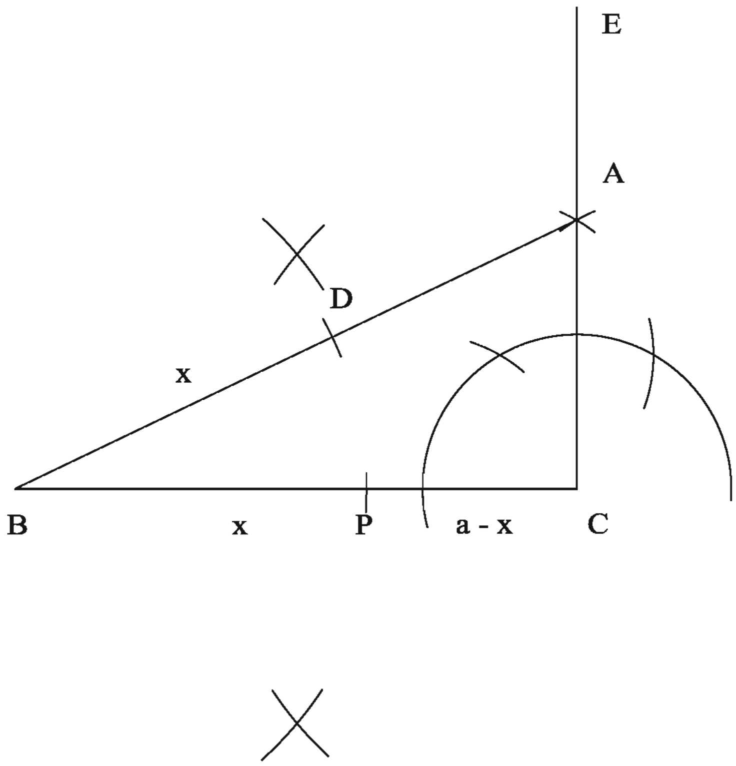
$\therefore$ AP ঃ PB = AD ঃ DM = m ঃ n

আবার যেহেতু QD রেখাংশ ABN ত্রিভুজের এক বাহু BN এর সমান্তরাল,

$\therefore$ AQ ঃ QB = AD ঃ DN = m ঃ n.

সম্পাদ্য-৬

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে যেন সমগ্র রেখাংশের ও একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অন্য অংশটির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।



BC (= a) একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। একে P বিন্দুতে এমনভাবে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে যেন $BC.CP = BP^2$ হয়।

অঙ্কনের বিবরণ : C বিন্দুতে BC এর উপর CE লম্ব অঙ্কন করি। CE থেকে $CA = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ অংশ কেটে নিই। A, B যোগ করি। AB থেকে $AD = \frac{a}{2}$ অংশ কেটে নিই।

মনে করি, BD = x এবং BC থেকে BP = x অংশ কেটে নিই।
তাহলে, BC রেখাংশ P বিন্দুতে নির্ণেয় অংশে অন্তর্বিভক্ত হল।
প্রমাণ : ABC সমকোণী ত্রিভুজে $BC^2 = AB^2 - AC^2$

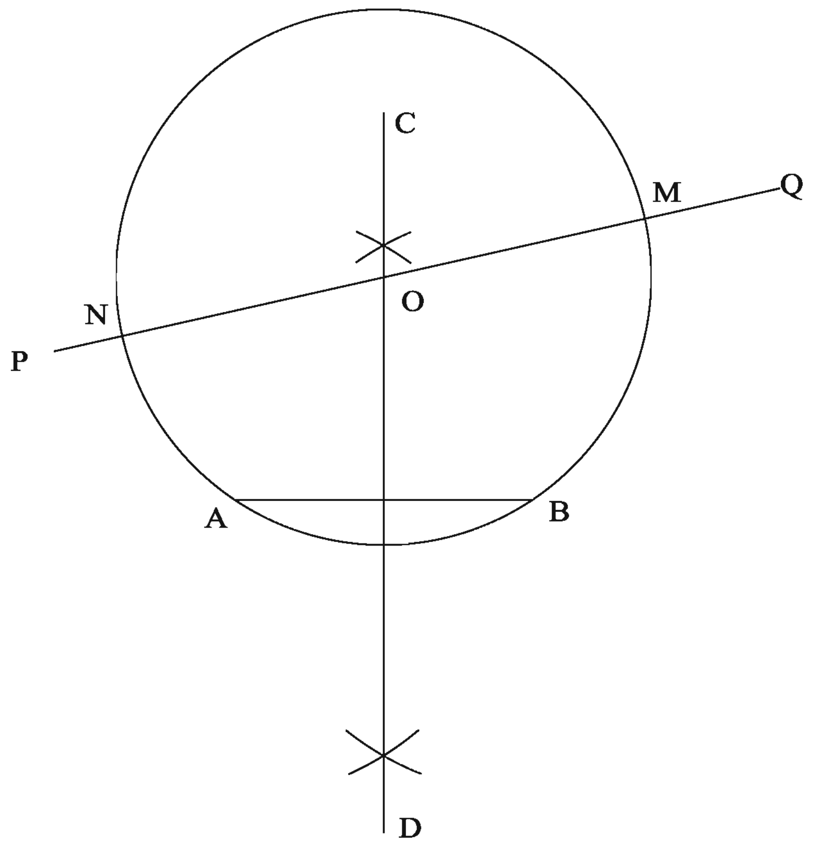
অর্থাৎ $a^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax$

$\therefore\ x^2 = a^2 - ax = a\,(a-x)$ অর্থাৎ $BP^2 = BC.CP$.

৫.৩। বৃত্ত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য-৭

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।



A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র PQ সরলরেখার উপর অবস্থান করে।

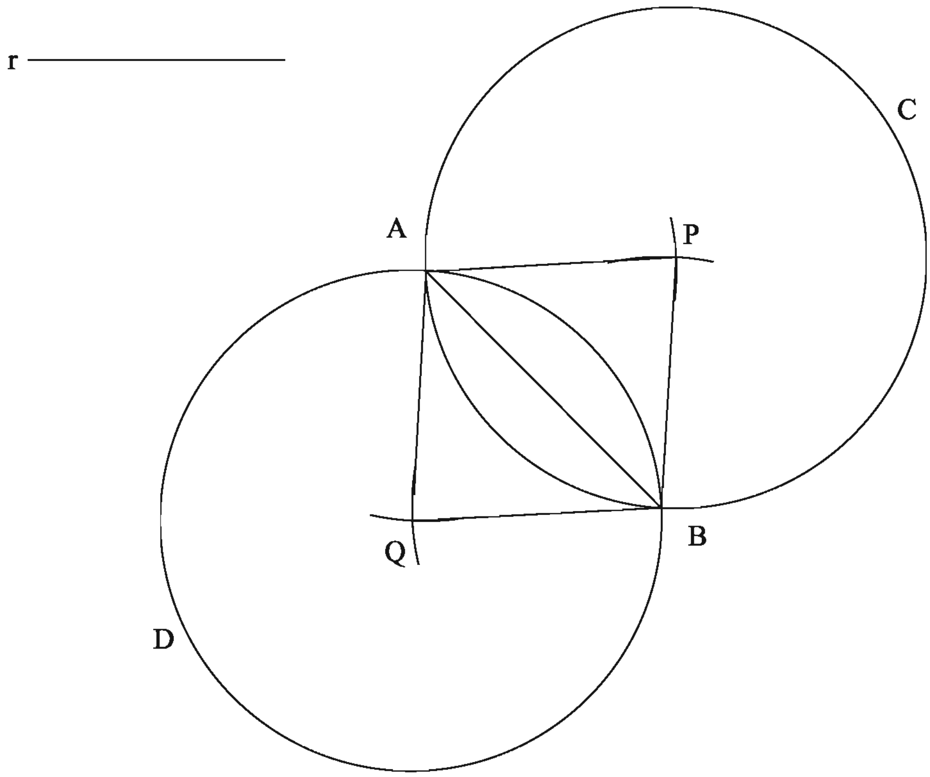
অঙ্কনের বিবরণ : A, B যোগ করে AB রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন করি। মনে করি, CD রেখাংশ PQ রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABMN বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : CD রেখা AB রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CD রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। অঙ্কনানুসারে, O বিন্দুটি CD ও PQ এর উপর অবস্থিত। আবার OA ও OB সমান বলে O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুটি PQ রেখার উপর অবস্থান করবে।

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্য-৮

একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।



A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ব্যাসার্ধ r এর সমান হয়।

অঙ্কনের বিবরণ : A ও B যোগ করি এবং A ও B কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর প্রত্যেক পাশে দুইটি করে বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। এক পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং অপর পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। P কে কেন্দ্র করে PA এবং Q কে কেন্দ্র করে QA ব্যাসার্ধ নিয়ে যথাক্রমে অঙ্কিত ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : $PA = PB = r$,

$\therefore$ P কে কেন্দ্র করে PA বা PB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABC বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $PA = r$ হয়।

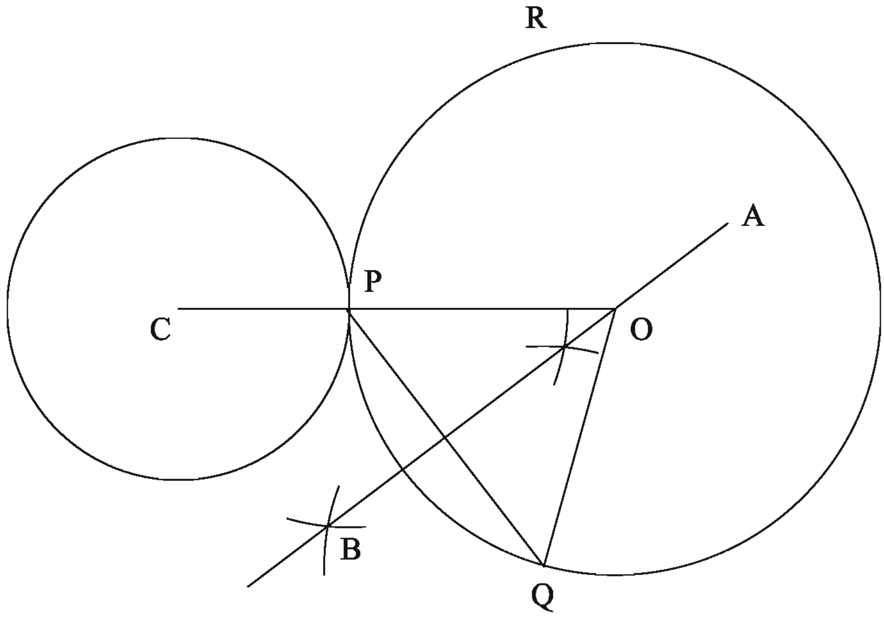
আবার $QA = QB = r$

Q কে কেন্দ্র করে QA বা QB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABD বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $QA = r$ হয়।

$\therefore$ ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রতিটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য-৯

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।



মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C, P ঐ বৃত্তের ওপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের বিবরণ : P, Q যোগ করি এবং PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক AB আঁকি। CP যোগ করি। বর্ধিত CP রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR-ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, Q যোগ করি। AB রেখাংশ বা OB রেখাংশ PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

$\therefore\ OP = OQ$

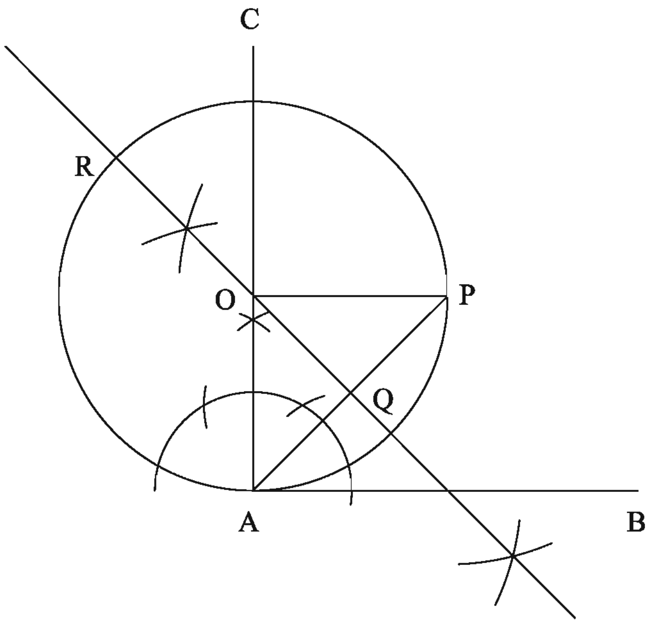
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা Q বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার P বিন্দুটি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত এবং P বিন্দু উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ P বিন্দুতে বৃত্তদ্বয় মিলিত হয়েছে। সুতরাং বৃত্তদ্বয় P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য-১০

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং ঐ রেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু দিয়ে যায়।



মনে করি, AB সরলরেখাস্থ A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB রেখার বহিঃস্থ P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা AB কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং P বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের বিবরণ : AB এর উপর A বিন্দুতে AC লম্ব অঙ্কন করি। P, A যোগ করে তার লম্বদ্বিখণ্ডক QO অঙ্কন করি। মনে করি, QO এবং AC রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি QO রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। APR–ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, P যোগ করি। AP রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক OQ এর উপর O বিন্দুটি অবস্থিত। $\therefore$ OA = OP

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত P বিন্দু দিয়ে যায়।

আবার OA ব্যাসার্ধ রেখার A প্রান্তবিন্দুতে AB এর উপর AO লম্ব।

$\therefore$ AB রেখাংশ বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

বিশ্লেষণ : যেহেতু বৃত্তটি নির্দিষ্ট রেখাকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং ঐ রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে সমকোণে থাকবে। সুতরাং নির্দিষ্ট রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব আঁকতে হবে এবং এই লম্বই বৃত্তের একটি ব্যাস হবে। আবার ঐ রেখাস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু ও বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু উভয়েই বৃত্তের পরিধির ওপরে থাকবে বিধায় এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়ে যাবে।

তাহলে এই লম্বই দ্বিখণ্ডক ও পূর্বাঙ্কিত ব্যাসের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

অনুশীলনী-৫

১। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

২। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৩। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৪। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও ভূমিতে অঙ্কিত মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১২। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৩। কোনো বৃত্তের AB জ্যা-এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে। যেন $CP^2 = AP. PB$ হয়।

১৪। তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশের চতুর্থ সমানুপাতিক নির্ণয় করতে হবে।

১৫। দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশের মধ্যসমানুপাতিক নির্ণয় করতে হবে।

১৬। একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করতে হবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সমতলীয় ভেক্টর

৬.১। স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সবক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। 5 সে.মি., 3 মিনিট, 12 টাকা, 5 লিটার, $6^{\circ}C$ ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ ও তাপমাত্রার পরিমাণ বোঝানো হয়। এসব পরিমাপের জন্য কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ উল্লেখ করলেই চলে। আবার যদি বলা হয় একটি লোক একবিন্দু থেকে যাত্রা করে প্রথমে 4 মি. ও পরে 5 মি. গেল, তাহলে যাত্রাবিন্দু থেকে তার দূরত্ব নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে জানা দরকার লোকটির গতির দিক কি? গতির সঠিক দিক না জানা পর্যন্ত যাত্রাবিন্দু থেকে লোকটি কতদূর গিয়েছে তা সঠিকভাবে নির্ণয় সম্ভব নয়।

যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায়, তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন. দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

৬.২। ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ : দিকনির্দেশক রেখাংশ

কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে আদিবিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তবিন্দু (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ (directed line segment) বলা হয়। কোনো দিকনির্দেশক রেখাংশের আদি বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হলে ঐ দিকনির্দেশক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। প্রত্যেক দিকনির্দেশক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশি, যার পরিমাপ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্য ($|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা সূচিত) এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দু নির্দেশকারী দিক।

বিপরীতক্রমে, যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিকনির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে রেখাংশটির দৈর্ঘ্য রাশিটির পরিমাণ এবং রেখাংশটির আদিবিন্দু হবে অন্তবিন্দু নির্দেশকারী দিক প্রদত্ত ভেক্টর রাশির দিক।

তাই, ভেক্টর রাশি ও দিকনির্দেশক রেখাংশ সমার্থক ধারণা। দিকনির্দেশককে জ্যামিতিক ভেক্টর বলেও উল্লেখ করা হয়। আমাদের আলোচনা একই সমতলে অবস্থিত ভেক্টরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

ধারক রেখা : কোনো ভেক্টর (দিকনির্দেশক রেখাংশ) যে অসীম সরলরেখার অংশবিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক (support) বলা হয়।

সচরাচর একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়;

যেমন $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু A ও অন্তবিন্দু B, $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোনো তথ্য পাওয়া যায় না।

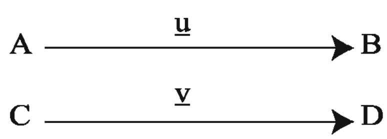
৬.৩। ভেক্টরের সমতা; বিপরীত ভেক্টর

সমান ভেক্টর : একটি ভেক্টর $\underline{u}$-কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হয় যদি

(i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ ($\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য)

(ii) $\underline{u}$ এর ধারক, $\underline{v}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়,

(iii) $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সঙ্গে একমুখী হয়।



সমতার এই সংজ্ঞা যে নিচের নিয়মগুলো মেনে চলে,

তা সহজেই বোঝা যায় :

(১) $\underline{u} = \underline{v}$

(২) $\underline{u} = \underline{v}$ হলে $\underline{v} = \underline{u}$

(৩) $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{u} = \underline{w}$ হলে $\underline{v} = \underline{w}$

$\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, আমরা সংক্ষেপে বলব যে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

দ্রষ্টব্য : যেকোনো বিন্দু থেকে প্রদত্ত যেকোনো ভেক্টরের সমান করে একটি ভেক্টর টানা যায়।

কেননা, বিন্দু P এবং ভেক্টর $\underline{u}$ দেওয়া থাকলে, আমরা P বিন্দু দিয়ে $\underline{u}$ এর ধারকের সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা টানি, তারপর P বিন্দু থেকে $\underline{u}$ এর দিক বরাবর ($\underline{u}$) এর সমান করে PQ রেখাংশ কেটে নিই। তাহলে অঙ্কন অনুযায়ী $\overrightarrow{PQ} = \underline{u}$ হবে।

বিপরীত ভেক্টর : $\underline{v}$ -কে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি

(i) $|\underline{v}| = |\underline{u}|$

(ii) $\underline{v}$ এর ধারক, $\underline{u}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়।

(iii) $\underline{v}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়।

$\underline{v}$ যদি $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হয় তবে $\underline{u}$ হবে $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর। সমতার সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায় যে, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ প্রত্যেকে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। অতএব, যেকোনো ভেক্টরের একটিমাত্র বিপরীত ভেক্টর রয়েছে।

$\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বোঝাতে -$\underline{u}$ লেখা হয়।

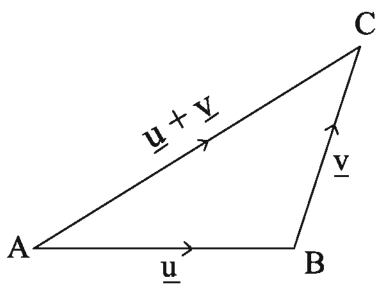
$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$.

দ্রষ্টব্য : পৃঃ ৫৪ (৬.৬ এর ২ খ) এবং পৃঃ ৫৫ দ্রষ্টব্য (২)

৬.৪। ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

১। (ক) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি

ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা : কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।



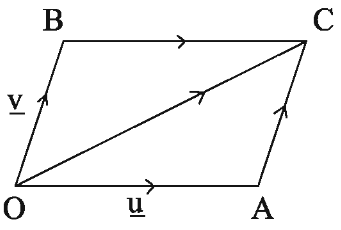
মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ এরূপ দুইটি ভেক্টর যে, $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বলা হয় এবং $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা সূচিত হয়।

$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।

(খ) ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধির অনুসিদ্ধান্ত হিসেবে ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি নিম্নরূপ : কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।

প্রমাণ : মনে করি, যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় OA এবং OB দ্বারা সূচিত হয়েছে। OACB সামান্তরিক ও তার OC কর্ণ অঙ্কন করি। তাহলে ঐ সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর যোগফল সূচিত হবে।



অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \underline{u} + \underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

OACB সামান্তরিকের OB ও AC বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

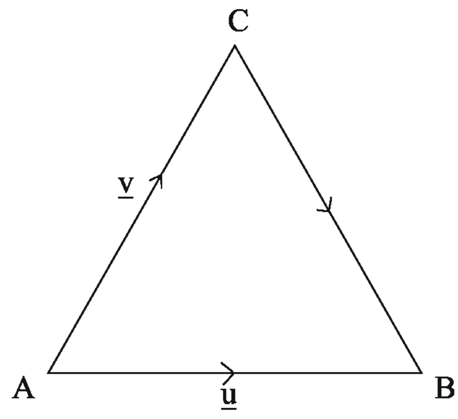
$\therefore \quad \underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

দ্রষ্টব্য : (১) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধিও বলা হয়। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়।

(২) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

২। ভেক্টরের বিয়োগ :

$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\underline{u} - \underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ($\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u} + (-\underline{v})$ বোঝায়।



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে

$\underline{u} - \underline{v} = \overrightarrow{CB}$; অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

কথায় : $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে

$\underline{u} - \underline{v}$ সেই ভেক্টর, যার আদিবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু এবং যার অন্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর অন্তবিন্দু।

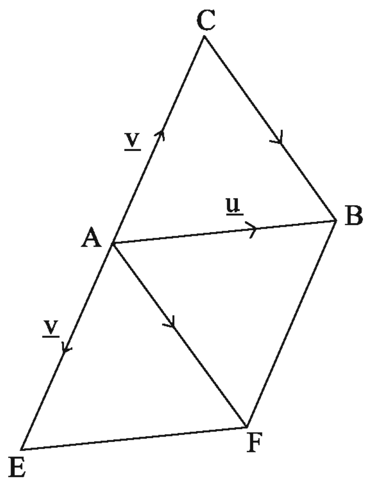
সংক্ষেপে : একই আদিবিন্দু বিশিষ্ট দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল হচ্ছে অন্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা বিপরীতক্রমে গঠিত ভেক্টর।

প্রমাণ : CA রেখাংশকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন AE = CA হয়।

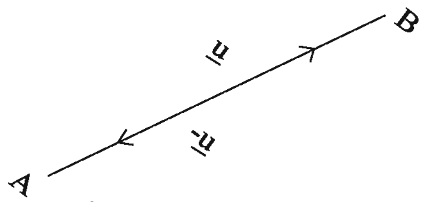
AEFB সামান্তরিক গঠন করি। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$

আবার AFBC একটি সামান্তরিক, কেননা BF = AE = CA
এবং BF || AE বলে BF || CA.
$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$ ভেক্টর স্থানান্তর
কিন্তু $\overrightarrow{AE} = -\underline{v}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$
সুতরাং $\underline{u} + (-\underline{v}) = \overrightarrow{CB}$ প্রমাণিত হল।



৩। শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।
$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে $\underline{u} + (-\underline{u})$ কি হবে?
ধরি $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ তখন $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$, ফলে
$\underline{u} + (-\underline{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী)



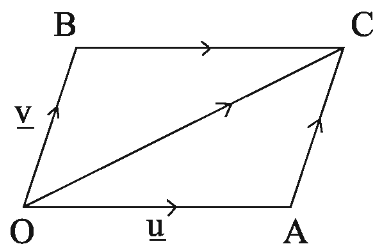
কিন্তু $\overrightarrow{AA}$ কি ধরনের ভেক্টর? এটি একটি বিন্দু ভেক্টর, অর্থাৎ এর আদিবিন্দু B অন্তবিন্দু একই বিন্দু; সুতরাং দৈর্ঘ্য শূন্য।
অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা বিন্দুকেই A বুঝতে হবে। এরূপ ভেক্টর (যার দৈর্ঘ্য শূন্য) কে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং $\underline{o}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এই একমাত্র ভেক্টর যার কোনো নির্দিষ্ট দিক বা ধারকরেখা নেই।
শূন্য ভেক্টরের অবতারণার ফলে আমরা বলতে পারি যে, $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{o}$
এবং $\underline{u} + \underline{o} = \underline{o} + \underline{u} = \underline{u}$
বস্তুত শূন্য ভেক্টরের সঙ্গে শেষোক্ত অভেদ নিহিত রয়েছে।

৬.৫। ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ

১। ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (Commutative Law)
যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, OACB সামান্তরিক ও তার কর্ণ OC অঙ্কন করি।
OA ও BC সমান ও সমান্তরাল এবং OB ও AC সমান ও সমান্তরাল।
$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$
আবার $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \underline{v} + \underline{u}$
$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$\therefore$ ভেক্টর যোজন বিনিময় বিধি সিদ্ধ করে।



ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি **(Associative Law)**
যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{w}$

অর্থাৎ $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{v}$ এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{w}$ অঙ্কন করা হয়েছে। O, C এবং A, C যোগ করি।

তাহলে $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$

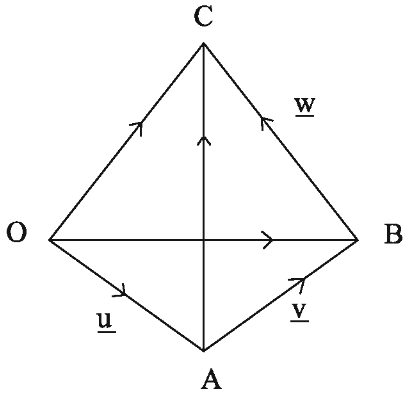
$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

আবার $\underline{u} + (\underline{v} - \underline{w}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

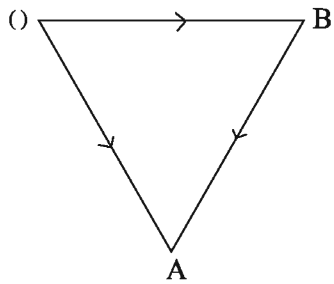
সুতরাং ভেক্টর যোজন সংযোগ বিধি সিদ্ধ করে।



অনুসিদ্ধান্ত : কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টরত্রয়ের যোগফল শূন্য।

উপরের চিত্রে, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} = (-\overrightarrow{AO})$

$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = 0$



৩। ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি (Cancellation Law)

যেকোনো $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$ হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} + (-\underline{u}) = \underline{u} + \underline{w} + (-\underline{u})$ (উভয়পক্ষে - $\underline{u}$ যোগ করে)

বা, $\underline{u} - \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} - \underline{u} + \underline{w}$

বা, $\underline{v} = \underline{w}$

৬.৬। ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক **(Scalar multiple of a vector)**

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ দ্বারা কোন ভেক্টর বোঝায়, নিচে তা ব্যাখ্যা করা হল।

(১) $m = 0$ হলে $m\underline{u} = \underline{0}$

(২) $m \neq 0$ হলে $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন;

$m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য এর দৈর্ঘ্যের (m) গুণ এবং

(ক) $m > 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন

(খ) $m < 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত।

দ্রষ্টব্য : (১) $m = 0$ অথবা $\underline{u} = \underline{0}$ হলে $m\underline{u} = \underline{0}$

(২) $1\,\underline{u} = \underline{u}$, $(-1)\,\underline{u} = -\underline{u}$

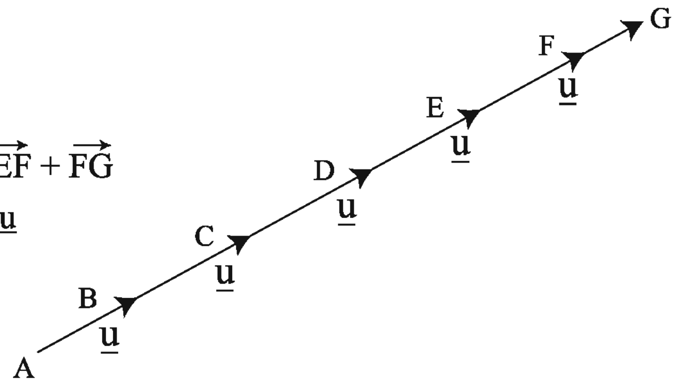
উপরিউক্ত সংজ্ঞা হতে দেখা যায় যে, $m\,(n\underline{u}) = n\,(m\underline{u}) = mn\,(\underline{u})$

mn উভয়ে > 0, উভয়ে < 0 একটি > 0 অপরটি < 0, একটি বা উভয় 0, এ সকল ক্ষেত্রেও পৃথক পৃথকভাবে বিবেচনা করে সহজেই সূত্রটির বাস্তবতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া যায়। নিচে এর একটি উদাহরণ দেয়া হল :

মনে করি $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \underline{u}$

AC কে G পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করি যেন

$CD = DE = EF = FG = AB$ হয়।



তখন $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

$= \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} = 6\underline{u}$

অন্যদিকে $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG}$

$= 2\underline{u} + 2\underline{u} + 2\underline{u}$

$= 3\ (2\ \underline{u})$

এবং $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = 3\underline{u} + 3\underline{u} = 2(3\underline{u})$

$\therefore\ \ 2(3\underline{u}) = 3(2\underline{u}) = 6\underline{u}$

দ্রষ্টব্য : দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অপরটির সাংখ্যগুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

বাস্তবিক $AB \,||\, CD$ হলে

$\overrightarrow{AB} = m\ \overrightarrow{CD}$, যেখানে, $|\ m\ | = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{AB}{CD}$

$m > 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী হয়,

$m < 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

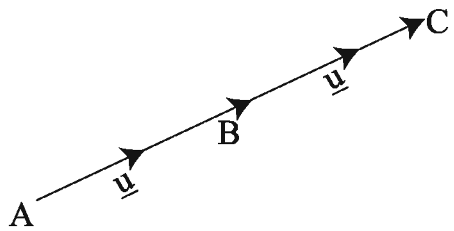
৬.৭। ভেক্টরে সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টন সূত্র

(Distributive laws concerning scalar multiples of vectors)

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}, \underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে,

(১) $(m + n)\ \underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

(২) $m\ (\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$



প্রমাণ : (১) m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore\ \ |\overrightarrow{AB}| = m\ |\ \underline{u}\ |$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $|\ \overrightarrow{BC}\ | = n\ |\ \underline{u}\ |$ হয়।

$\therefore\ \ \overrightarrow{BC} = n\underline{u}$ এবং

$|\ \overrightarrow{AC}\ | = |\ \overrightarrow{AB}\ | + |\ \overrightarrow{BC}\ | = m\ |\ \underline{u}\ | + n\ |\ \underline{u}\ | = (m + n)\ |\ \underline{u}\ |$

$\therefore\ \ \overrightarrow{AC} = (m + n)\ \underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$